عنـــــــوان

بسم الله الرحمن الرحيم

معر   معادلات ديفرانسيل و مشتقات جزئي:

اگر معادله اي شامل جند متغ   و مشتقات آ ا باشد، آن معادله يك معادله ديفرانسيل ناميده مـي شود.معادله ديفراسيل با مشتقات جزئي معادله اي است كه شامل يك تابع و مـتغ هـاي آن و مشتقات جزئي مربوط مي باشد.فرم كلي معادلات ديفرانسيل با مشتقات جزئي به صورت رابطه (۱)مي باشد:

رابطه (۱):

$$G(u,u_x,u_{xx},\ldots\ldots,u_x^{(n)},u_y,u_{yy},\ldots\ldots,u_y^{(m)},u_{xy}^{(i+j)},\ldots\ldots)=0$$

كه در آن

$$u_x=\frac{\partial y}{\partial x}\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=u_y\qquad u_{xy}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$$

مثال:

$$\begin{cases} u_{xxx}(x,y)+u_{yyy}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}=0 \end{cases}$$

موعه معادلات PDE يك موعه معادلات نا دود مي باشد.از اين موعه تنها ش كوچكي داراي كاربردهاي خاص مي باشد.

غالب مسائلي كه در كاربردهاي PDE مطرح مي شوند داراي فرمهاي اسبا (رابطه (۲))

مي باشند.كه در آن A , B , ..., G ضرايب معادله PDEهستند.

رابطه (۲): $Au_{xx}(x,y)+Bu_{xy}+Cu_{yy}(x,y)+Du_{x}(x,y)+Eu_{y}(x,y)+Fu(x,y)+G=0$

اين معادله را فرم استاندارد معادله درجه ۲ از مشتقات جزئي مي نامند.

چنانچه A , B , ..., G توابعي از x , y باشند، معادله ي درجه ۲ خطي ناميده مي شود و چنانچه A , B , ..., G تابعي از U باشد ،معادله ي غ خطي ناميده مي شود.

مثال: معادله غ خطي درجه دو $u_{xx}+(\sin u)_{uy}=0$

مثال: معادله خطي درجه دو $zu_{xx}(x,y)+xy^{2}u_{yy}(x,y)+e^{x}u(x,y)=10$

معادله ديفرانسيل با مشتقات جزئي خطي درجه ۲ در حوزه ي $u(x,y,z)$

معادلات ديفرانسيل با مشتقات جزئي روي خط ، صفحه و يا فضا تعريف مي شوند.در بسياري از كاربردها ،مقاد تغ رU در مرز ناحيه يا فضايا روي خط معلوم مي باشد.نيزدر برخي كاربردها مقدار تابع U در نقطه شروع زمان و مكان معلوم مي باشد.مسـائل گـروه اول Boundary value Problems (مسائل با مقادر مرزي) و مسائل گروه دوم را Initional Value Problems ميناميم.حالـت تركي از مقادير مرزي و اوليه نيز وجود دارد. يك معادله ديفرانسيل،خطي ناميده مي شود وقـ كه معادله و شرايط اوليه يا مقاديرمرزي آن خطي باشد.

معادله ديفرانسيل PDE گن يا Homogenus ناميده مي شود وق معادله و شرايط آن گن باشند براي روش هايي كه در اين درس ارائه مي شود ،خطي و گن بودن يك معادلـه , در وجـود جواب معادله نقش اساسي دارد.براي توضيح اينكه به چه دليل به حل معادلات مشتقات جزئـي نيازمند . مثا ائي را در فيزيك مطرح مي كنيم كه حل دقيق آ ا به حل يك معادله PDE نيازمند است.به عبارت ديگر بيشتر كاربرد اين درس براي حل مسائلي است كه در زير ونه هائي ازآن آورده شده است.

حل مسآله سيم نوسان كننده :

فرض مي كنيم سيمي به طول L در دو نقطه Fix شده باشد .سيم را باريك و داراي چگا جرم طو يكنواخت فرض مي كنيم.

سيم داراي حركت در راستاي y با سرعت $V(x+\Delta x,t)$ است .

از آ ا كه در راستاي x حركت ندار بنابراين:

$$H(v,t)=H(x+\Delta x,t)\rightarrow H(x,t)=cte \qquad \forall t \qquad 0<x<l$$

$$\tan\alpha=\frac{v(x+\Delta x,t)}{H} \qquad \tan\beta=\frac{-v(x,t)}{-H}$$

$$\tan\alpha = y_x(x+\Delta x,t) \qquad \tan\beta = y_x(x,-t)$$

باقرار دادن معادله ن و $\Delta F = ma$ براي يك ا ان طول سيم و در راستاي y دار

$$\Rightarrow v(x+\Delta x,t)-v(x,t)=\delta.\Delta s.y_{tt}(x,t)$$

كه در ان Δs كمان ا اد شده توسط ا ان در نظر گرفته شده مي باشد و در صور كه

$$\Delta x = \Delta s \Rightarrow \frac{v(x+\Delta x,t)-v(x,t)}{\Delta x} = \delta\, y_{tt}(x,t)$$

$$H\left(\frac{y_x(x+\Delta x,t)-y_x(x,t)}{\Delta x}\right)=\delta\, y_{tt}(x,t)$$

رابطه (٤):

$$Hy_{XX}(x,t)=\delta\, y_{tt}(x,t) \Rightarrow H/_{\delta}\, y_{xx}(x,t)=y_{tt}(x,t)$$

δ , H مقادير ثابت هستند δ جرم واحد طول سيم و H كشش سيم مي باشد.

نشان داد كه معادله ديفرانسيل حاكم بر سيم نوسان كننده به فرم:

$$y_{tt}(x,t)=H/_{\delta}\, y_{xx}(x,t)$$

كه در آن y(x,t) ا راف سيم در راستاي y و در نقطه x و زمان t باشد چنا ه ن ويي بر سيم وارد ائيم معادله ن و بصورت رابطه (٥) خواهد بود:

رابطه (٥):

$$\delta\, \Delta x y_{tt}(x,t)=H(y_x(x+\Delta x),t)-y_x(x,t)+F\Delta x$$

اين رابطه از جايگزين كردن رابطه (٣)بدست مي آيد.

بنابراين:

$$y_{tt}(x,t)=H/_{\delta}\left(\frac{y_x(x+\Delta x,t)-y_x(x,t)}{\Delta x}\right)+f/_{\delta}$$

بنابراين:

$$y_{tt}(x,y)=H/_{\delta}\, y_{XX}(x,t)+f/_{\delta}$$

با در نظر گرف مسأله وزن خواهيم داشت:

$$\delta\, \Delta x y_{tt}(x,t)=H(y_x(x+\Delta x,t)-y_x(x,t))-g\,\Delta x$$

$$y_{tt}(x,y)=H/_{\delta}\, y_{xx}(x,t)-g$$

براي حال كه سيم در يط داراي اصطكاك باشد; مي دانيم كه ن وي اصطكاك اجسام متحـرك در هوا، گازها و سيالات با سرعت حركت هم متناسب است.رابطه(٦)

رابطه(٦): b :ضريب اصطكاك $f == -by_t(x,t)$

بنابراين: $y_{tt}(x,t) = {}^{H}\!/_{\delta}\, y_{xx}(x,t) - by_t(x,t)$

معادلات ديفرانسيل بدون شرايط اوليه يا مرزي به صورت كامل قابل حل نيستند بنابراين وقـ
كامل است كه شرايط اوليه يا مرزي آن نيز مشخص باشد.

شرايط مرزي سيم نوسان كننده:

حال كه سيم داراي ا راف اوليه است و ت ا راف اوليه رها مي شود.

$$y(0,t)=0$$
$$y(l,t)=0$$
$$y(x,0)=f(x) \quad 0<x<\ell$$

آنگاه دار :

كه در آن f(x) منحن ا راف اوليه است.

شرايط مرزي سري دوم:وق كه سيم ت يك ضربه داراي سرعت اوليه
مي شود:

$$y(0,t)=0$$
$$y(\ell,t)=0$$
$$y(x,0)=0$$
$$y_t(x,0)=g(x)$$

كه در ان g(x) سرعت نقطه x در ظه صفر مي باشد.

مدلسازيهاي مربوط به مسايل نوسان با يكي از دو صورت فوق ا ام مي شود.

مسأله ميله نوسان كننده

يك ميله قابل ار اع كه ت يك ن و قرار دارد در نظر بگ يد.y(x,t)را تابعي در نظربگ يدكه ميزان جا ايي نقطه X را در زمان t نسبت به مكان اوليه اسبه مي كند.ميزان جا ايي نقطه $X+\Delta X$ برابر با مكان اوليه نقطه $X+\Delta X$ مي باشد.ن وي وارده بر ميله F(X,t) مد نظر مي گ كه ن وي وارد بر واحد طول مي باشد.

از روي قانون هوك و با توجه به روابط تنش ميزان تغي طول با رابطه (v)مشخص مـي شـود

$F = \quad y(x+\Delta x) - y(x,t)$

بدست مي آيد:

A :سطح مقطع ميله

B:مدول الاستيسيته(يانگ)رابطه (v)

$$F(x,t) = \frac{E}{\Delta x}\left(y(x+\Delta x,t) - y(x,t)\right)$$

$$F(x,t) = AEy_x(x,t)$$

مقدار ﻧ و به صور است كه ميله از حالت الاستيك خارج نشود.

پس:

براي نقطه xدار

$$F(x,t) = -Ey_x(x,t)$$

$$F(x+\Delta x,t) = AEy_x(x+\Delta x.t)$$

معادله ﻧ و براي يك ا ان طو ازميله به صورت رابطه (۸) است:

$$F(x+\Delta x,t) - F(x,t) = \delta A \Delta x y_{tt}(x,t)$$

A:سطح مقطع رابطه (۸)

Δ:طول

δجرم واحد طول

$$\Rightarrow y_{tt}(x,t) = \frac{AE}{\delta A}\left(\frac{y(x+\Delta x,t) - y(x,t)}{\Delta x}\right)$$

رابطه (۹):معادله ميله نوسان كننده

$$y_{tt}(x,t) = \frac{E}{\delta} y_{xx}(x,t)$$

براي يك صفحه نوسان كننده دار :

$$Z_{tt}(x,y,t) = H/_{\delta}\left(Z_{xx}(x,y,t) + Z_{yy}(x,y,t)\right)$$

كه در آن Z_{tt} ميزان ا راف نقطه xوyدر ظه t ميباشد.

مساله انتقال حرارت:

براي يك حجم R دماي نقطه u(x,y,z,t) را در x,y در ظه t در نظربگ يد.مي خواهيم بـا استفاده از قواﻧ ترمو ديناميك معادله ديفرانسيل براي هر نقطه را به صورت تابعي اززمان بدست اور .

انطور كه ميدانيم شار حرار كه از يك ا ان صفحه عبور مي كند با رابطه زير مشخص مـي شود.كه nبردار عمود بر سطح ا ان صفحه مورد نظر مي باشد

$$\phi = -K\frac{du}{dn}$$

ϕ :شار k:رسانايي n:بردار عمود بر سطح

مثلاً حرارت انتقا در راستاي ورهاي xوyوzبه صورت روابط (۱۰) بدست مي ايد :

$$\phi_1 = -K\frac{du}{dx}$$

و حرارت انتقا در راستاي ور y: روابط (۱۰)

$$\phi_2 = -K\frac{du}{dy}$$

$$\phi_3 = -K\frac{du}{dt}$$

جريان حرار y را به به صورت ع شارها معر مي كنيم.

$$J = \phi_1 \hat{I} + \phi_2 \hat{J} + \phi_3 \hat{K}$$

$$J = -k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\hat{I} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{J} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{K}\right)$$

$$J = -k(\Delta u)$$

به اين صورت ϕ در هر راستا به صورت $\phi = J.n$ بدست مي ايد

مثال :شار عبوري ازصفحه yz : .

$$\phi = j \quad j = -k\frac{du}{dx}$$

اگر I_1 برابر كل تغي ات حرار جسم مورد نظر بگ ، I_1 با رابطه زير مشخص مي شود:

$I_1 = \iiint_{R_0} \delta u dv$ شار حرار (و حرار)

از طر شاري كه از سطح ناحيه خارج مي شود باعث تغي انرژي حرار ناحيه ميگردد.

كل شار حرار خارج شده ازناحيه انتگرال زير مشخص مي شود:

$$I_1 = \iint_R J.dA$$

بنابراين:(از رياضيات دار):

$$I_2 = \iiint_R (divj)dv = \iiint_R \nabla(J)dV$$

$$I_2 = \iiint_R -k\nabla.Jdv = \iiint -k\nabla^2 udV$$

از آ ايي كه اين روابط براي هر حجم برقرار مي باشد بنابراين

باملاحظه فيزيك مسأله دار (وق در داخل ناحيه منبع حرار ندار) :

$$I_1 = I_2$$

$$I_1 - I_2 = 0 \Rightarrow \iiint_R (\delta(u_t) - ku(vu))dv = 0$$

چون اين معادله براي هر ناحيه ي R برقرار است و U كمي پيوسته است ، بنابراين لازم است .

$$\delta u_t = ku(v_u) = 0 \Rightarrow \Delta U_t = k\nabla^2 u$$

$$\nabla u(x,y,t,z)vu = \frac{\partial u}{\partial x}i^{\wedge} + \frac{\partial u}{\partial y}j^{\wedge} + \frac{\partial u}{\partial z}k^{\wedge}$$

$$u_1 = M_1\hat{i} + M_2\hat{j} + M_3\hat{k}$$

$$U_M = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\left(M_1\hat{i} + M_2\hat{j} + M_3\hat{k}\right) = \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial M_3}{\partial z}$$

با تركيب موارد فوق $\overline{u} = Uu$ دار :

پس:

$$K\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \delta u_t(x, y, z, t)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,t,z,t)}{\partial z^2} = \frac{\partial}{k}\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t)$$

معادله انتقال حرارت

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{\delta}{k}u_t$$

هدف از ث هاي ارائه شده اين است كه نشان دهيم مسائل و رفتارهايي در فيزيك و واقعيـت وجود دارند كه مي توان آ ا را به فرم معادلات PDE ايش دادو حل آ ا احتياج به روشهاي PDE دارد E

درمسأله انتقال حرارت ديد كه رابطه كلي انتقال حرارت در هر ناحيه بوسيله رابطه P D E زير مشخص مي شد.

$$? \nabla^2 u = \frac{\partial}{k}u_t \qquad \nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x^2}$$

بررسي شرايط مرزي در معادله انتقال حرارت :

چنانچه از يك مرز ناحيه شار ثابت حرار وارد شود، در اين صورت:

$$k\frac{du}{dn}\Big| = \phi_0$$

اگر مز عايق باشد داراي شرايط مرزي به صورت زير است كه:

$$\frac{du}{dx} = 0$$

اگر عايق باشد شرط مرزي صفر است

چنانچه مرز به يك دماي ثابت متصل باشد آنگاه انتقال رارت بصورت زير مي باشد:

اگر يط رسانا باشد انتقال حرارت به صورت رسانايي مي باشد و دار

$$k\frac{du}{dn} = h(T_0 - u)$$

-يك ورق فلزي به صورت زير در نظر مي گ .مطلوب است معادلات انتقال حرار روي هر نقطه از ورق:

$$\nabla^2 u = \frac{\delta}{k}\frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\delta}{k}\frac{\partial u}{\partial t}$$

معادله براي هر نقطه از نوار فلزي

حال بايد شرايط مرزي را اعمال كنيم.براي حل معادله نياز به شرايط مرزي دار .(روي ورق)

۱) مرز۱ $k\left.\frac{du}{dx}\right| = o \qquad u_x(x,o,t) = 0 \qquad 0 < x < l$

$o < x < l, \quad y = 0$

۲) مرز۲ $k\frac{du}{dx}| = \phi_0 \qquad Ku_x(o,y,t) = \phi_0 \qquad y > 0$

$x = 0, \quad y > 0$

۳) مرز ۳ $k\frac{du}{dx}| = h(o,u) \qquad KUx(0,y,t) = -h(u) \qquad y > o)$

$x = e, \quad y > 0$

دماي اوليه صفحه را نيز بصورت u(x,y,0)=f(x) در نظر مي گ

معادله نوسان $\nabla^2 u = \partial^2 u / \partial t^2$

معادلات بر فرم $\nabla^2 u = \delta(u,x,y,z,t)$ را معادلات لاپلاس مي گوئيم و uتابع ت لاپلاسـ را تابع هارمونيك

مي نامند.كاربرد اين معادلات در مباحث سيالات ، ترموديناميك ، الكترو مغناطيس ،موج ، آكوستيك ، وم ،ارتعاشات ، بيولوژي و ..

اگر u_2, u_1 دو تابع و c_2, c_1دو ضريب در R باشند ، آنگاه $c_1u_1 - c_2u_2$را تركيب خطي u_1 و u_2 مي ناميم.

-e را يك اپراتور خطي مي ناميم وq $e\{c_1u_1 + c_2u_2\} = c_1e\{u_1\} + c_2e\{u_2\}$

براي مثال انتگرال گ يك اپراتور خطي است:

$$e\{u\} = \int u dt \to e\{c_1u_1 + c_2u_2\} = \int (c_1u_1 + c_2u_2) du =$$

خواص اپراتور خطي:

$$\int c_1 u_1 du + \int c_2 u_2 du = c_1 \int u_1 du + c_2 \int u_2 du$$

$$e\{0\} = 0$$

$$e\left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k u_k \right\} = \sum_{k=1}^{n} c_k e\{u_k\}$$

اگر M نيز يك اپراتور خطي باشد، در اين صورت:

$$e\{M\{u\}\} = M\{e\{u\}\} = eM\{u\}$$

$$(e+M)\{u\} = e\{u\} + M\{u\}$$

انطور كه قبلاً ث شد، معادلات مورد توجه فرم:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial xy} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu(x,y) = G(x,y)$$

مي باشد.

از ب ،اين معادلات گن كه در آن G=0 است ، مبا حل معادلات مي باشد.حال اپراتور e را بصورت زير تعريف مي كنيم:

$$e = A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2}{\partial xy} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial}{\partial x} + E\frac{\partial}{\partial y} + F$$

حال بيان معادله گن با اپراتور e بصورت

مي باشد.(u برابر است با والتاژ، دما،مكان ،پتانسيل،فشار يك سيال) $e\{u\} = 0$

حال مي توان نشان داد كه معادله غ گن به صورت $e\{u\} = G$ خواهد بودو مي توان نشان داد چنانچه u_1, u_2جوا ا معادله گن باشد:يع $e\{u_1\} = 0 \quad e\{u_2\} = 0$

در اين صورت $c_1 e\{u_1\} + c_2 e\{u_2\} = e\{c_1 u_1 + c_2 u_2\} = 0$

نتيجه:اگر u_1, u_2 جوا اي معادله گن باشند،هر تركيب خطي آ ا جواب معادله گن است.كا - آن در يك ضرب شود. ايت جواب بدست خواهد آمد.

اگر u_1 جواب معادله گن باشد و u_2جواب معادله نا گن ، در اين صورت.

$$e\{u_1\} = 0 \qquad e\{u_2\} = G$$

در اين صورت هر تابع u كه $u = cu_1 + u_2$ جواب معادله غ گن خواهد بود.

$$e\{cu_1 + u_2\} = ce\{u_1\} + e\{u_2\} = G$$

مثال:مسألَه سيم مرتعش زير را در نظر بگ يد $u_t(x,t) = Ku_{xx}(x,t)$

شرايط مرزي اين است:

$$u_x(o,t)=0$$
$$u_x(c,t)=0$$

در اين صورت جواب معادله گن به فرم

$$u_0(x,t)=\tfrac{1}{2} \qquad U_n(x,t)=\exp\left(-\frac{n^2\pi^2k}{c^2}t\right)\cos\frac{n\pi x}{c} \qquad n=1,2,......$$

مشتق تابع نسبت به t

$$u_t(x,t)=\left(\frac{-n^2\pi^2k}{c^2}\right)\exp\left(\frac{-n^2\pi^2k}{c^2}t\right)\cos\frac{n\pi x}{c}$$

تفاوتشان در k است

$$u_{xx}=\left(\frac{-n^2\pi^2}{c^2}\right)\exp\left(\frac{-n^2\pi^2}{c^2}kt\right)\cos\frac{n\pi x}{c}$$

سپس $ku_{xx}=u(x,t)$

مي توان نتيجه گرفت كه

$$u=c_ou_o+c_1u_1+.....+c_nu_n$$

نيز جواب معادله فوق خواهد بود.

معادلات به فرم $Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G$

خطي درجه ٢ هستند وة A تا F تابعي از x , y , t باشند

چنانچه ضرايب F-A عدد ثاب باشند،معادله را معادله خطي درجه ٢با ضريب ثابت مي ناميم.

حال اگر $B^2-4Ac>0$ معادله هذلو يا H yperbolic گوئيم و اگر $B^2-4Ac=0$ باشد معادله را بيضوي يا Ecllipite گويند واگر $B^2-4Ac>0$ باشد سهمي گوئيم.(Parabolic).

انواع معادلات لاپلاس:

مسأله لاپلاس را مسأله ديريشله يا نوع اول گويند اگر در شرايط مرزي مقدار u روي مرز دانسته شود.

مسأله لاپلاس نوع را نيومن گويندأگر مقدار مشتق u روي شي از مرز داده شده باشد.

مسألهِ ي لاپلاس را نوع سوم گويند اگر روي مرز مقدار $Ku+\frac{du}{dn}$ داده شده باشد.

مسأله لاپلاس را نوع چهارم (كوشي) گويند اگر معادله لاپلاس شامل ترمهاي u_{tt},u_t باشد و مقدار u يا u_t در ظه صفر دانسته شده باشد.

بيان تصا ا:

كارترين به استوانه اي

$$\begin{cases} x=p\cos\phi \\ y=p\sin\phi \\ z=z \end{cases} \qquad \begin{cases} p=\sqrt{x^2+y^2} \\ \phi=Arc\ \tan\left(y/x\right) \\ z=z \end{cases}$$

استوانه اي ← كروي

$r=\sqrt{p^2+z}$ $\theta = Arc\tan\left({}^{p}\!/_{z}\right)$

$\phi=\phi$

كروي ← دكار

$$\begin{cases} x = rSin\ \theta Cos\ \phi \\ y = rSin\ \theta Sin\ \phi \\ z = rCos\ \theta \end{cases}$$

كروي ← استوانه اي

$$\begin{cases} p = rSin\ \theta \\ \phi = \phi \\ z = rCos\ \theta \end{cases}$$

كارتزين ← كروي

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\phi = ArcTan\,{}^{y}\!/_{x}$$

$$z = ArcTan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$$

بيان معادله لاپلاس در تصات استوانه اي :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

در اينصورت تابع u بصورت $u(p,\phi,z)$ خواهد بود.

حل:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \phi}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial p}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\partial u}{\partial \phi}\cdot\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial p}\cdot\frac{x}{p}-\frac{Sin\phi}{p}\frac{\partial u}{\partial \phi}=Cos\phi\frac{\partial u}{\partial p}-\frac{Sin\phi}{p}\frac{\partial u}{\partial \phi} \quad *$$

به جاي u در عبارت * قرار مي دهيم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x} = Cos\,\phi\left(\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right) - \frac{Sin\,\phi}{p}\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)$$

$$\frac{\partial^2 `u}{\partial x^2} = Cos\left(\frac{\partial}{\partial p}\left(Coc\phi\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{Sin\phi}{p}\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)\right) - \frac{Sin\phi}{p}\left(\frac{\partial}{\partial \phi}Cos\phi\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{Sin\phi}{p}\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = Cos\,\phi\left(Cos\,\phi\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \frac{Sin\,\phi}{p^2}\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{Sin\,\Im}{p}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial p}\right) -$$

$$\frac{Sin\phi}{p}\left(-Sin\phi\frac{\partial u}{\partial p} + Cos\phi\frac{\partial^2 u}{\partial u \partial \phi} - \frac{Cos\phi}{p}\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{Sin\phi}{p}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\right)$$

$$= Cos^2\phi\frac{\partial^2 u}{\partial p} + \frac{Cos\phi Sin\phi}{p^2}\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{Cos\phi Sin\phi}{p}\frac{\partial^u u}{\partial \phi \partial p} + \frac{Sin^2\phi}{p}\frac{\partial u}{\partial p} -$$

$$\frac{Sin\,\phi Cos\,\phi}{p}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial p} + \frac{Sin\,\phi Cos\,\phi}{p^2}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{Sin^2\phi}{p}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \Rightarrow$$

$$Cos^2\phi\frac{\partial^2 p}{\partial p^2} + \frac{2Sin\phi Cos\phi}{p^2}\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{2Cos\phi Sin\phi}{p}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial p} + \frac{Sin^2\phi}{p}\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{Sin^2\phi}{p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$$

اسبه ي: $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Sin\phi\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{Cos\phi}{p}\frac{\partial u}{\partial \phi} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = Sin\phi\,{}^{\partial}\!/_{\partial p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{Cos\phi}{p}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

در ایت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = Sin^2\phi\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \frac{2Sin\phi Cos\phi}{p}\frac{\partial^2 u}{\partial p \partial \phi} + \frac{Cos^2\phi}{p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{Cos^2\phi}{p}\frac{\partial u}{\partial p}$$

$$-\frac{2\sin\phi Cos\phi}{p^2}\frac{\partial u}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2(x,y,z)}{\partial z^2} \qquad \nabla^2 u = 0$$

$$\nabla^2 u = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + {}^1\!/_p\frac{\partial u}{\partial p} + {}^1\!/_{p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

بیان معادله لاپلاس در مختصات استوانه اي:

$$P^2\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}+p\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2}p^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

اگر مسأله در راستاي z ثابت باشد:

$$P^2\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}+p\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2}p^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad p\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

معادله زير يك معادله لاپلاس در مختصات استوانه اي است:

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x^{2+}}+x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad \begin{matrix} o<x<\infty \\ 0<y<2\pi \end{matrix}$$

تمرين:معادله لاپلاس را به معادله كروي تبديل نمائيد.(معادله لاپلاس در فرم كروي)

در نهايت:

$$\nabla^2 u=0\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2 Sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}+\frac{Cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}=0$$

روش ديگر نمايش:

$$\nabla^2 u={}^1\!/_r(ru)_{rr}+\frac{1}{r^2 Sin^2\theta}u_{\phi\phi}+\frac{1}{r^2 Sin\theta}(u\theta Sin\theta)_\theta$$

$$(u+ru_r)\rightarrow(u_r+u_r+ru_{rr})$$

روش ديگر نمايش:

$$\nabla^2 u=\frac{1}{r^2}(r^2 ur)_r+\frac{1}{r^2 Sin^2\theta}u_{\phi\phi}+\frac{1}{r^2 Sin\theta}(u_\theta Sin\theta)_\theta$$

اگر مسأله مستقل از ϕباشد:

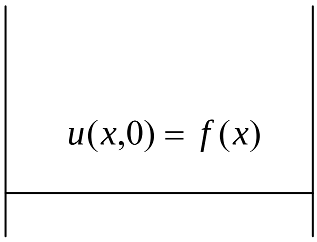
$$r\frac{1}{r^2}(r^2 u_r)_r+\frac{1}{r^2 Sin\theta}(u_\theta Sin\theta)_\theta=\nabla^2 u$$

فصل دوم:حل معادله $\nabla^2 u=G$

روش حل معادله به وسيله معادله گرين و بدست آوردن يك جواب اختصاصي براي مساله مـي باشد.يك روش كاربردي براي حل معادلات لاپلاس ،روش جداسازي متغيرها ميباشد. (Sepration of Vauiable)

بري توضيح اين روش از يك مثال استفاده مي كنيم:

$$Ku_{xx}(x,t)=u_t(x,t) \qquad 0<x<c \quad t>0$$



شرايط مرزي

$$\begin{cases} Ku_{xx}(x,t)=u_t(x,t) \\ u_x(0,t)=0 \\ u_x(c,t)=0 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$$

در ايت به متوسط يه f(x) خواهيم رسيد.

قضيه ۱): اگر u_1 .... u_n جواب هاي معادله فوق باشند $u=\sum c_k u_k$ نيز جوا بـراي مساله است.

قضيه ۲): اگر u پيوسته و گراي يكنواخت باشد سري جواب به ازاي $n=\infty$ گرا واهد بود.

قضيه ۳): جوا كه در حالت كلي بدست مي آيد يكتاست.

$u(x,t)$ را مي خواهيم.

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

روش جداسازي متغ ها

تابعي از كان =تابعي از زمان

$$KX''(x)T(t)=X(x)T'(t)\rightarrow\frac{KX''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{T(t)}$$

اين تساوي در صور برقرار است كه نسبت كسرها ثابت باشد .

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{K}\frac{T'(t)}{T(t)}=\lambda\rightarrow$$ عدد ثابت

$$\frac{X'(x)}{X(x)}=\lambda \qquad \frac{T'(t)}{KT(t)}=\lambda$$

معادله 1 ← $X''(x)-\lambda X(x)=0$

معادله۲ ← $T'(t)-\lambda KT(t)=0$

با حل معادلات ۱و۲ جواب بدست خواهد آمد.به معادلات ۱،۲ معادلات اشتروم ليوويل گويند.

وي اعمال شرايط مرزي:

$$1 \quad X'(o)T(t) = X'(c)T(t) = 0$$

$$\Rightarrow T(t) \neq 0, X'(o) = o_1 X'(c) = 0$$

$$\begin{cases} X'(x) - \lambda x(x) = 0 \\ X(o) = 0 \\ X'(c) = 0 \end{cases} \qquad T'(t) - k\lambda t(t) = 0 \Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = k\lambda \Rightarrow CosT(t) = k\lambda t + CosA$$

$$\Rightarrow Cos\frac{T(t)}{A} = k\lambda t \Rightarrow \frac{T(t)}{A} = e^{k\lambda t} \Rightarrow T(t) = Ae^{k\lambda t}$$

وي حل معادله __ سه حالت در نظر مي گ :

$$1)\lambda > 0 \quad X''(x) - \lambda X(x) = 0 \Rightarrow X(x) = a_1 e^{\sqrt{\lambda x}} + a_2 e^{-\sqrt{\lambda x}} \quad \lambda > 0$$

فرض $\lambda = a^2 \Rightarrow X''(x) = a^2 \times (x) \Rightarrow X(x) = Ae^{ax} + Be^{-ax}$

$$X(x) = Aae^{ax} - Bae^{-ax}$$

$$\begin{cases} X'(o) = 0 \Rightarrow A - B = 0 \\ X'(c) = 0 \Rightarrow Ae^{ac} - Be^{-ac} = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow A = 0, B = 0$$

اگر X(x) صفر باشد u (x,t) صفر است پس $\lambda > 0$ جوا ا اد ي كند.

$$2)\lambda = 0 \quad X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = Ax + B$$

$$X'(o) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$X'(c) = 0 \Rightarrow A = 0$$

در اين حالت

$$X(x) = B \qquad T(t) = A \qquad u(x,t) = X(x)T(t) - A.B$$

$$u(x,o) = f(x) \Rightarrow AB = f(x)$$

پس اگر f (x) ثابت باشد در اين صورت $u(x,t) = f$ واضح است.

$3)\lambda < 0$ $\quad X''(x) = -a^2 X(x) \Rightarrow X(x) = ACosax + BSinax$

$\lambda = -a^2$

$$X'(o) = 0 \Rightarrow -AaSinac + aBCosax = 0 \Big|_{x=0} \qquad B = 0$$

$$X'(o)=0 \Rightarrow -AaSinac=0 \Rightarrow Sinac=0 \rightarrow ac=n\pi \Rightarrow a=\frac{n\pi}{c}$$

$$X(x)=Cos\left(\frac{n\pi}{c}x\right) \qquad n=0,1,......$$

$$T(t)=e^{k\lambda t}=e^{-ka^2t}=e^{-k}\left(\frac{n^2\pi^2}{c^2}\right)t \qquad n=0,1,...$$

امي u_n ها در معادله ي $ku_{xx}=u_t$ و شرايط مرزي اش صدق مي كند.پس سري زيـر نيـز در معادله ي شرايط مرزي صدق مي كند:

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}a_n u_n(x,t)$$

$$u(x,t)=X(x)T(t)=e^{-k}\frac{n^2\pi^2}{c^2}+Cos\frac{n\pi x}{c}$$

$$u_n(x,t)=e\frac{-kn^2\pi^2}{c^2}Cos\left(\frac{n\pi x}{c}\right) \qquad n=0,1,.....$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{\frac{-n^2\pi^2}{c^2}kt}Cos\frac{n\pi x}{c}$$

پس نقط كا ضرايب a_n را بدست آوريد:

اسبه ضرايب با استفاده از شرط مرزي $u(x,0)=f(x)$

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n Cos\frac{n\pi x}{c}=f(x)$$

سري $\sum a_n Cos\frac{n\eta x}{c}$ بايسد به f (x) گرا باشد.

براي اسبه a_n به موارد زير توجه بشود:

$$\int_0^c Cos\frac{n\pi x}{c}dx=\frac{c}{n\pi}Sin\frac{n\pi}{c}=0 \qquad \begin{cases} o & n=1.2,........ \\ c & n=0 \end{cases}$$

$$\int_0^c Cos\frac{n\pi x}{c}Cos\frac{m\pi x}{c}dx={}^1\!/_2\int_0^c\left(Cos(n+m)\frac{\pi x}{c}+Cos(n-m)\frac{n\pi}{c}\right)dx$$

$\Rightarrow$ فرض كنيم n,mn,m طبيعي اند $\begin{matrix} n=1,2,...... \\ m=1,2,..... \end{matrix}$ $\begin{cases} 0 & \forall m,n|m\neq n \\ {}^c\!/_2 & n=0 \end{cases}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n Cos\frac{n\pi x}{c}=f(x)=a_0+a_1Cos\frac{n\pi x}{c}+a_2Cos\frac{2\pi x}{c}+........+a_nCos\frac{n\pi x}{c}=f(x)$$

براي   اسبه   كا   از دو طرف انتگرال از 0 تا c بگ   .دراينصورت:

$$a_0\int_0^c dx + a_1\int_0^c Cos\frac{nx}{c}dx + ... + ... = \int_0^c f(x)dx$$

$$a_0 c = \int_0^c f(x)dx \Rightarrow a_0 = {}^1\!/_c\int_0^c f(x)dx$$

براي   اسبه a_1 در $Cos\frac{nx}{c}$ (ضريب خودش)ضرب كرده و انتگرال مي گ   .

$$a_0\int_0^c Cos\frac{nx}{c}dx + a_1\int_0^c Cos\frac{nx}{c}Cos\frac{nx}{c}dx + ...$$

$$= \int Cos\frac{nx}{c}f(x)dx = a_i\,{}^c\!/_2 = \int f(x)cCos\frac{\eta x}{c}dx$$

به   ترتيب:

$$a_1 = {}^2\!/_c\int_0^c f(x)Cos\frac{2\eta x}{c}dx$$

$$a_n = {}^2\!/_c\int_0^c f(x)Cos\frac{n\eta x}{c}dx \qquad \forall n = 1,2,........$$

$Ku_{xx} = u_t$ مسآله انتقال حرارت $u_x(0,t) = 0$ $u_x(c,t) = 0$

دماي اوليه نقطه: $u(x,0) = ?$

مثال:فرض كنيد كه f (x) تابعي بصورت زير باشد. $f(x) = 10x$ $c = 10x$

جواب هر معادله را بدست آوريد.

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{c^2}kt} Cos\frac{n\eta x}{c}$$

$$k = \frac{\text{ظرفيت حرارتي واحد حجم}}{\text{جرم واحد حجم}}$$

$$a_0 = {}^1\!/_{10}\int_0^C 10x\,dx \qquad a_n = {}^2\!/_{10}\int_0^c f(x)Cos\frac{n\pi x}{c}dx$$

$$a_0 = 50 \text{ متوسط} \qquad a_n = {}^2\!/_{10}\int_0^{10} 10xCos\frac{n\pi x}{c}dx$$

$$a_n = {}^2\!/_{10}\int_0^c xCos\frac{n\pi}{10}x\,dx = {}^2\!/_{10}\left(\frac{u10}{n\pi}Sin\frac{n\pi x}{c}\Big|_0^{10} - \frac{10}{n\pi}\int_0^{10} Sin\frac{n\pi x}{c}dx\right)$$

$$\begin{cases} \text{زوج} & a_n = 0 \\ \text{فرد} & a_n = -\frac{400}{n^2\pi^2} \end{cases} \quad \text{يا} \quad a_n = \frac{200}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$a_n = \frac{2}{10}\left(\left(\frac{10}{n\pi}\right)^2 Cos\frac{n\pi x}{10}\Big|_0^{10}\right) \Rightarrow a_n = \frac{200}{n^2\pi^2}(Cosn\pi - 1)$$

$$u(x,t) = 50 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{200}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)e^{\frac{-n^2\pi^2 k}{10}t}\,Cos\frac{n\pi x}{10}$$

جواب مسأله انتقا حرارت با شرايط اوليه f (x)

روش Sepration od Voualley ترين روش براي حل معادلات با مشتقات جزئي مي باشد.

با روش فوق الذكر ، جوا براي معدلا لاپلاس ارائه ود .سوا كه مطرح است اين است كه آيا جواب بدست آمده يكتاست يا خ ؟

فصل ۱۵ كتاب چرچيل ،اثبات يكتايي جواب پيشنهادي به اين روش است.

روش هاي ديگر حل معادلات PDE:

برخي از مسائل PDE را مي توان با روش هاي مبتكرانه حل ود.اين روش ها صرفاً براي حـالا خاص برقرارند.

مثال:

$$u_{xx}(x,y) = 0 \qquad u(0,y) = y^2 \qquad u(1,y) = 1$$
$$0 < x < 1 \qquad -\infty < y < \infty$$

$$u_{xx}(x,y) = 0 \Rightarrow u_x(x,y) = \phi(y)$$ كن است ثابت باشد و $\Rightarrow u(x,y) = \phi(y)x + h_y$

$$u(0,y) = y^2 \Rightarrow h(y) = y^2 \qquad (\phi(y)\times 0)$$

$$u(1,y) = \phi(y) + h(y) = 1 \Rightarrow \phi(y) = 1 - y^2$$

$$u(x,y) = (1 - y^2)x + y^2$$

روش ديگر

براي مثال:

$$a^2 y_{xx}(x,t) = y_{tt}(x,t)$$

$$y(x,0) = h(x) \qquad -\infty < x < \infty$$
$$y_t(x,o) = 0 \qquad t > 0$$

حل:براي حل معادله از تبديل زير استفاده مي كنيم: ←

$$\begin{cases} u = x + at \\ v = x - at \end{cases}$$

يع   مغ ها را مي توان برحسب (v , u) يا (x , t) نوشت

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial y}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial v}.\frac{\partial u}{\partial t} \qquad y(x,t)\rightarrow y(u,v)$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}.a+\frac{\partial u}{\partial v}.(-a)=a\frac{\partial y}{\partial u}-a\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\Rightarrow\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a\frac{\partial}{\partial u}\left(a\frac{\partial y}{\partial u}-a\frac{\partial y}{\partial v}\right)-a\frac{\partial}{\partial v}\left(a\frac{\partial y}{\partial u}-a\frac{\partial y}{\partial v}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}-a^2\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}-a^2\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$$

$$\Rightarrow a^2\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}-2a^2\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial v}\right)=\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$$

با جاگذاري در معادله PDE

$$a^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)=a^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)$$

$$4\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}=0\Rightarrow\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}=0\Rightarrow\begin{cases}y_n(u,v)=h(u)\\ y_v(u,v)=q(v)\end{cases}$$

يك تابع پيشنهادي بصورت زير است:

$$g(u,v)=f(u)+g(v) \qquad f'(u)\rightarrow 0$$

پس جواب به صورت

$$y(u,v)=f(u)+g(v)$$

است و جایگذاري
$$x+at=u$$
$$x-at=v$$

از شرایط مرزي دار :

$$y(x,t)=f(x,at)+g(x-at)$$

$$af'(x)-ag(x)=0\Rightarrow f'(x)=g'(x)$$

$$f(x)=g(x)+k$$ یا c

$$2f(x)=h(x)+c\Rightarrow f(x)=\tfrac{1}{2}(h(x)+c)$$

$$2g(x)=h(x)-c\Rightarrow g(x)=\tfrac{1}{2}(h(x)-c)$$

پس $y(x,t)=f(x,at)+g(x-at)=\tfrac{1}{2}(h(a+at)+h(x-at))$

سایر روش هاي مورد استفده عبارتند از :

۱)تبدیل لاپلاس ۳)تبدیل انتگرا فوریه

۲)تبدیل فوریه ٤)نگاشت کانتورمال

مثال:معادله لاپلاس زیر را حل کنید؟

$$y_{tt}(x,t)=a^2y_{xx}(x,t)$$

$$y(o,t)=y(c,t)=0 \qquad 1$$

$$y(x,0)=f(x) \qquad y_t(x,0)=0 \qquad 3$$

انطور که مي دانيم اين معادله نوسان تامسر نقش است.طول تار c , a ضريب است که به جنس تار و جرم واحد طول بستگي دارد.

روش حل:جداسازي متغ ها

$$y(x,t)=X(x)T(t)$$

$$X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t)\Rightarrow\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}=\begin{cases}\lambda^2\\0\\-\lambda^2\end{cases}$$

الف
$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\lambda^2\Rightarrow x''(X)=\lambda^2X(X)$$
$$\frac{T''(t)}{T(t)}=\lambda^2\rightarrow T''(t)=a^2\lambda^2T(t)$$

$$\begin{cases} X(t) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} \\ T(t) = Ce^{a\lambda t} + De^{-a\lambda t} \end{cases}$$

$1 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \qquad \Rightarrow A = 0, B = 0$

$X(c) = 0 \Rightarrow Ae^{\lambda c} + Be^{-\lambda t} = 0$ غ‌ق‌ق

ب) $\lambda = 0 \Rightarrow \begin{matrix} X''(x) = 0 \\ T''(t) = 0 \end{matrix} \begin{cases} X(x) = Ax + B \\ T(t) = Ct + D \end{cases}$

شرایط مرزي $\begin{cases} X(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \\ X(c) = 0 \Rightarrow A = 0 \end{cases}$

ج) $\lambda < 0 \qquad \begin{cases} X''(x) = -\lambda^2 X(x) \Rightarrow X(x) = B\,Sin\lambda x + A\,Cos\lambda x \\ T''(t) = -a^2\lambda^2 T(t) \Rightarrow T(t) = C\,Sin a\lambda + +D\,Cos\lambda t \end{cases}$

$1 \rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \qquad X_n(x) = Sin\frac{n\lambda}{c}x$

$X(c) = 0 \Rightarrow BSin\lambda c = 0 \Rightarrow \lambda c = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{c} \qquad \forall_n = 0,1,.....$

پس ایت جواب دار :

$T_n(t) = CSin\frac{an\pi}{} + +DCos\frac{an\pi}{c} + *$

$3: \quad X(x)T'(0) = 0$

$* = 0 \Rightarrow T_n'(0) = 0 \Rightarrow C$

باید صفرباشد

$Tn(t) = Cos\frac{an\pi C}{T}$

بنابراین : $X_n(x) = Sin\frac{n\pi x}{c} \quad , \quad T_n(t) = Cos\frac{a\pi x}{c}t$

پس $Y_n(x,t) = Sin\frac{n\pi x}{c}Cos\frac{a\pi x}{c}t$

این ترکیب خطي جواب است . $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin\frac{n\pi x}{c}Cos\frac{a\pi x}{c}t$ پس

فقط باید b_n را بدست آور $\sum_{n=1}^{\infty} b_n Cos\frac{n\pi x}{c}$

برنامه اي اسبه اي دقيق y(x,t) لازم است که ضـرایب اسـبه شـوند.از شـرط اولیـه

g(x,0)=f(x) استفاده مي کنیم.که f(x) ا راف اولیه تاراست.(به جاي t صفر مي گزار)

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin\frac{n\pi x}{c} = f(x)$$

$$\int_0^c Sin\frac{n\pi x}{c}dx = -\frac{c}{n\pi}Cos\frac{n\pi x}{c}\Big|_0^c = -\frac{c}{n\pi}(Cosn\pi - 1) = \frac{c}{n\pi}\left((-1)^{n+1} + 1\right) = \frac{c}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right)$$

$$\int_0^c Sin\frac{n\pi x}{c}Sin\frac{m\pi x}{c}dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ c/2 & n=m\end{cases}$$

با ضرب رابطه $f(x)=\sum b_n Sin\frac{n\pi x}{c}$ در $Sin\frac{n\pi x}{c}$ و گرفتن انتگرال دار :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_o^c b_n Sin\frac{n\pi x}{c}Sin\frac{m\pi x}{c}dx=\int_0^c f(x)Sin\frac{m\pi x}{c}dx$$

$$c/2\, b_m=\int_0^c f(x)Sin\frac{m\pi x}{c}\Rightarrow b_m=2/c\int_0^c f(x)Sin\frac{m\pi x}{c}dx$$

مثال f(x) تابع روبرو باشد:

$$\begin{cases}f(x)=0.2x & 0<x<10\\ f(x)=-0.2x+4 & 10<x<20\end{cases}$$

$$=2/20\left(2/10\left(-x\frac{20}{n\pi}Cos\frac{n\pi x}{20}\Big|_0^{10}+\frac{20}{n\pi}\int_0^{10}Cos\frac{n\pi x}{20}dx\right)\right)$$

$$b_n=2/20\int_0^{20}f(x)Sin\frac{n\pi x}{20}dx=2/20\left[\int_o^{10}2/10\,x\,Sin\frac{n\pi x}{20}dx+\int_{10}^{20}\left(-2/20+4\right)Sin\frac{n\pi x}{20}dx\right]$$

$$+\left(\left(\left(-2/20\,x+4\right)\left(\frac{-20}{n\pi}Cos\frac{c\pi x}{20}\Big|_0^{20}+\frac{20}{n\pi}\int_{10}^{20}\left(\frac{-2}{10}Cos\frac{n\pi x}{c}dx\right)\right)\right)\right)$$

$$........+\int_{10}^{20}\frac{-2}{20}xSin\frac{n\pi x}{20}dx+\int_{10}^{20}4Sin\frac{n\pi x}{20}dx$$

$$=2/20\int_{10}^{20}xSin\frac{n\pi x}{20}dx+\frac{4\times 20}{n\pi}\left(-Cos\frac{n\pi x}{20}\right)\Big|_{10}^{20}=.........$$

فصل سوم سري هاي فوريه:

معر توابع قطعه اي پيوسته:

اگر تابع f(x) در فاصله[a,b] به جز چند نقطه اي دود قابل ارش پيوسته باشد،به آن تابع ،

تابع قطعه اي پيوسته مي گويند.

نقاط ناپيوستگي $x_1, x_2, ...x_n$ كه

$$a < x_1 < x_2 .... < x_n < b$$

نيز لازم است تا حدود زير موجود باشند

$$f(x_1^-) f(x_1^+), f(x_2^-), f(x_2^+), ..., f(x_n^-), f(x_n^+)$$

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1Mx < -0.5 \\ a & -0.5 < x < 0.5 \\ 1 & 0.5 \le x < 1 \end{cases}$$

انتگرال تابع قطعه اي پيوسته را در فاصله (c,d) كه $(c,d) \subset (a,b)$ بصورت زير تعريـف مـي شود:

$$\int_c^d f(x)dx = \int_c^{x_M} f(x)dx + \int_{x_M}^{x_{M+1}} f(x)dx + ... + \int_{x_{r-1}}^{d} f(x)dx$$

توابع پيوسته حالت خاصي از توابع قطعه اي پيوسته اند.

فوريه براي تقريب توابع در يك بازه از سري هاي سينوسي و كسينوسي استفاده كرد كه مي توان با تقريب مناسب از هر دقت د واه كه واهيم تـابع f (x) اي را كـه قطعـه پيوسـته است،(در فاصله [a,b]، توسط سري هاي سينوسي و كسينوسي تقريب زد و دو سري ارائه كرد كه به سري هاي سينوسي فوريه و كوسينوسي فوريه معروف هستند.

سري كسينوسي فوريه: پيشنهاد فوريه براي بسط كسينوسي بصورت روبرو است

$$f(x) = {a_o}/{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Cos \frac{n\pi x}{c}$$

از اين سري براي تقريب توابع f(x) قطه اي پيوسته در فاصله 0 تاC استفاده مي شود.

مثال: تابع f(x) كه $0 < x < \eta$ را توسط سري كسينوسي تقريب بزنيد.

$$f(x) \approx {a_o}/{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Cos \frac{n\pi x}{\pi}$$

براي اسبه ضريب a_n دار :

$$ {a_o}/{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Cosnx = f(x) \Rightarrow {a_o}/{2} \int_0^{\eta} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\eta} Cos\, nx\, dx = \int_0^{\eta} f(x)dx$$

$$= \frac{a_o}{2} \times \pi + o = \int_o^\eta f(x)dx \Rightarrow a_o = \frac{2}{\pi}\int_o^\eta f(x)dx$$

$$\frac{a_o}{2}\int_o^\eta Cos\, mx\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_o^\eta Cos\, nx\, Cos\, mx\, dx = \int_o^\eta f(x) Cos\, mx\, dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{2}\left[\int_o^\eta (Cos(n-m)x - Cos(nn+m)x)dx = \int_o^\eta f(x) Cos\, mx\, dx\right.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{2}\left[\int_o^\eta (Cos(n-m)x - Cos(nn+m)x)dx = \int_o^\eta f(x) Cos\, mx\, dx\right.$$

بنابراين در كل

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_o^\eta f(x) Cos\, nx\, dx$$

بسط سري سينوسي:

اگر f(x) يك تابع در فاصله [0,c] باشد و بصورت قطعه اي پيوسته باشد .مي توان f(x) را توسط يك سري سينوسي فوريه تقريب زد.

$$f(x) \cong \sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin\frac{n\pi x}{c}$$

چنانچه n به ايت ميل كند ،تقريب تا حدود د واه دقيق مي شود.

$$f(x) \cong \sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin\frac{n\pi x}{c}$$

مطلوب است b_n ها:

براي اسبه f(x) توجه شود كه :

$$\int_o^c Sin\frac{n\pi x}{c} Sin\frac{m\pi x}{c} dx = \int_o^c f(x) Sin\frac{m\pi x}{c} dx$$

پس با ضريب طرف در سينوس $\frac{m\pi x}{c}$ و انتگرال جواهيم داشت

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_o^c Sin\frac{n\pi x}{c} Sin\frac{m\pi x}{c} dx = \int_o^c f(x) Sin\frac{m\pi x}{c} dx$$

$$b_m \frac{c}{2} = \int_o^c f(x) Sin\frac{m\pi x}{c} dx \Rightarrow bm = \frac{2}{c}\int_o^c f(x) Sin\frac{m\pi x}{c} dx$$

مثال:تابع f(x)=x را در فاصله (o,π) با بسط سينوسي فوريه ثقريب بزنيد:

$$f(x) \cong \sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin\frac{n\pi x}{c} \Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin\, \pi x$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_o^\pi x Sin\, nx\, dx = \frac{-x}{n} Cos\, nx \int_o^\pi + \frac{1}{n}\int_o^\pi Cos\, nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1} - o + \frac{1}{n^2} Sinx \int_o^\pi \right) = \left(\frac{(-1)^{n+1} \times \pi}{n}\right) \times \frac{2}{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \times 2}{n} Sin\, nx = 2SinX - Sin2x + \frac{2}{3} Sin3x...........$$

در خارج ازاين فاصه بسط سينوسي اولاً داراي پريور است.و نيز به دليل

اينكه $Sin\,nx$ فرد است بنابراين $\sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin\,nx$ هم فرد است.

شكل روبرو بسط تابع $f(x)$ و خود تابع را مشخص مي كند.

$\sum b_n Sin\,nx$

$f(x)=x \qquad [0,\pi]$

البته اگر تابع را توسط كسينوسي فوريه بيان مي كرد داراي خواص زير بود

$$f(x)={a_o}/{2}+\sum an\,Cosnx$$

خواص:۱-بسط داراي پريور 2π (ك،م،م)

۲-بسط به دليل اينكه از لات كسينوسي تشكيل شده زوج است.

نكته:پريود يك تابع ثابت هر عددي مي تواند باشد .

فرض كنيد كه $f(x)$ يك تابع قطعه اي پيوسته در فاصله ي (-c،c) انطور كه مي دانيم هر تابع را مي توان بصورت ع در تابع زوج و فرد نوشت.

$$f(x)=h(x)+g(x) \qquad \text{كه} \qquad g(-x)=-g(x) \quad , \quad h(-x)=h(x)$$

$$h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \qquad g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

تابع $h(x)$ يك تابع زوج است بنابراين چنانچه $h(x)$ را درفاصله (۰،c) با بسط كسينوسي تقريب

بزنيم ،تابع $h(x)$ در ناحيه(-c،c) تقريب زده خواهد شد.

$$h(x)={a_o}/{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n Cos\frac{n\pi x}{c} \qquad a_n={2}/{c}\int_o^c h(x)Cos\frac{n\pi x}{c}dx$$

$$f(x)=h(x)+g(x) \qquad (-c,c)$$

پس

$$f(x)={a_o}/{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n Cos\frac{n\pi x}{c}+\sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin\frac{n\pi x}{c} \qquad \text{كه} \qquad x\in(-c,c)$$

كه اين بسط تابع فوريه $f(x)$ در فاصله (-c،c) مي باشد.حال بايد ضرايب را پيدا ائيم.

$$a_n={2}/{c}\int_o^c \frac{f(x)+f(-x)}{2}Cos\frac{n\pi x}{c}dx={1}/{c}\left[\int_o^c f(x)Cos\frac{n\pi x}{c}dx+\int_o^c f(-x)Cos\frac{n\pi x}{c}dx\right]$$

$$={1}/{c}\left[\int_o^c f(x)Cos\frac{n\pi x}{c}dx+\int_{-c}^o f(x)Cos\frac{n\pi x}{c}dx\right]={1}/{c}\int_{-c}^c f(x)Cos\frac{n\pi x}{c}dx$$

بنابراین $f(x)$ در فاصله $(-c,c)$ با بسط زیر مشخص مي شود.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n Cos\frac{n\pi x}{c}+b_n Sin\frac{n\pi x}{c}\right)$$

$$a_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}f(x)Cos\frac{n\pi x}{c}dx \qquad b_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}f(x)Sin\frac{n\pi x}{c}dx$$

مثال: تابع زیر را بسط فوریه بدهید: $x\leftarrow(-\pi,\pi)$

$$f(x)\begin{cases}0 & -\pi<x<-\frac{\pi}{2}\\ 1 & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ 0 & \frac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n Cos\ nx+b_n Sin\ nx)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)Cos\ nx\ dx \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)Sin\frac{n\pi x}{\pi}dx$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi}1\times Cosnx\,dx=\frac{1}{n\pi}Sinnx\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{1}{n\pi}\left(Sin\frac{n\pi}{2}+Sin\frac{n\pi}{2}\right)=\frac{1}{n\pi}\times 2Sin\frac{n\pi}{2}$$

حال $\qquad b_n:\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}Sin\ nx\ dx=0$

بنابراین

a_o را اسبه مي كنيم $\qquad \int_{-\pi/2}^{\pi/2}1dx=1 \qquad f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi}Sin\frac{n\eta}{2}\right)Cos\,nx$

یا مقدار متوسط =

قضیه:اگر تابع $f(x)$یك تابع قطعه اي پيوسته در فاصله ي $(-\pi,\pi)$ باشد و بسط $f(x)$ فوریه $f(x)$ باشد،خواهيم داشت.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n Cos\,nx\,dx+b_n Sin\,nx)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)Cosnx\,dx \quad , \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)Sin\,nx\,dx$$

حال چنانچه یك نقطه ناپیوستگي تابع $f(x)$باشد و با توجه به این که تابع $f(x)$پیوسته است.

مقدار $f(x_\circ)$بوسیله رابط زیر مشخص مي شود: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}Sin\,nx$

كه به قضيه متوسط جام موسوم است.

اين قضيه دو ریاضي اثبات مي شود.

مثال :تابع $f(x)=x$ در فاصله (π,π) بسط داده و قضيه متوسط آن را تست كنيد.

$$f(x)=x \qquad f(x)={a_\circ}/{1} + a_n\,Cosnx+ \quad b_n\,Sinnx$$

$$a_n = {1}/{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)Cos\ nx\ dx \qquad b_n = {1}/{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)Cos\ nx\ dx$$

$f(x)$ يك تابع فرد است پس: $a_n=0$

$$b_n = {1}/{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\ Sin\ \ x\ dx = {2}/{\pi}\int_{o}^{\pi} Sin\ \ nx\ dx = {2}/{\pi}\left(\frac{-x}{\pi}Cosx\int_{o}^{\pi} +\right)$$

$$+{1}/{\pi}\int_{o}^{\pi} Cos\ nx\ dx = {2}/{\eta}\int\frac{-\pi(-1)^n}{\pi}+o+{1}/{n^2}\ Sin\ nx\begin{bmatrix}\pi\\ o\end{bmatrix} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

پس

$$f(x)\cong\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}Sin\ \ nx$$

$$f(x)\cong\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}Sin\ \ nx$$ پس

$$=2\left(Sinx - {1}/{2}\,Sin2x + {1}/{3}\,Sin3x - {1}/{4}\,Sin4x + ...\right)$$

و $f(x)=f(x)$ x نقطه پیوستگي f باشد در غ اینصورت در نقطه ناپیوستگي متوسط تابع f مي شود.

$F(-\pi)=0 \qquad F(\pi)=0$

نقاط ناپیوستگي $f: -\pi,\pi$

كه این با متوسط مقادیر جام برابر است.

خواص ضرايب سري فوريه :

اگر $S_N(x)=a_o/2+\sum_{n=1}^{N}a_n Cosnx$ آنگاه دار :

$$\frac{2}{\pi}\int_o^\pi S_N(x)Cos\;nx = a_n$$

$$S_N(x)=a_0/2+\sum_{n=1}^{N}a_n Cosnx$$

نيز انتگرال به صورت زير اسبه مي شود:

$$\frac{2}{\pi}\int_o^\pi (S_N(x))^2 dx$$

$$\frac{2}{\pi}\int_o^\pi (a_o/2+\sum a_n Codnx)S_N(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_o^\pi a_0/2\, S_N(x)dx+\frac{2}{\pi}\sum a_n\int_o^\pi S_N(x)Cosnxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{a_o^2}{4}\int_o^\pi dx+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}a_n^2\times\pi/2=\left(\frac{a_o^2}{2}+\sum_{n=1}^{N}a_n^2\right)$$

حال براي حالت سينوسي دار :

$$S_N(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n Sin\;nx$$

دار

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi S_N(X)Sinmxdx = b_m$$

لذا

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi [S_N(X)]^2dx=\sum_{n=1}^{N}\frac{2}{\pi}\int_0^\pi S_N(X)b_n Sinnxdx$$

$$=\sum_{n=1}^{N}b_n\times\frac{2}{\pi}\int_0^\pi S_N(X)Sinnxdx=\sum_{n=1}^{N}(b_n)^2$$

براي هر دو حالت دار :

$$E=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi (f(x)-S_N(X))^2dx\ge 0$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f^2(x)dx\quad \frac{4}{\eta}\int_0^\pi f(x)S_N(x)+\frac{2}{\eta}\int_0^\pi (S_N(x))^2dx$$

به اين صورت مي نويسيم

از آ ا كه f تابعي قطعه اي پيوسته است كه به صورت سنوسي يا كسينوسي بسط فوريه داده مي شود و با توجه به اينكه تابع $f(x)$ در فاصله $(0,\pi)$ دود است ، لذا عبارت از 0 تا η :

اسبه مقدار عبارت: $\int_0^\pi f^2(x)dx$

(قطعه اي است دود)

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)S_N(x)dx$$

براي حالت كسينوسي دار :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\left(\frac{a_o}{2}+\sum_1 a_n Cosnx\right)dx=\frac{2}{\pi}\times\frac{a_0}{2}\int_0^\pi f(x)dx+\sum_{n=1}^{N} a_n \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)Cosnxdx$$

$$=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{N} a_n^2$$

براي حالت سينوسي دار :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\left(\int_0^\pi b_n Sinnx\right)dx=\sum_{n=1}^{N} bn\times\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)Sinnxdx=\sum_{n=1}^{N} b_n^2$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f^2(x)dx=\frac{a_o^2}{2}+\sum_{n=1}^{\pi}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$ قضيه پارسوال

در حالت كسينوسي براي حالت نامساوي دار :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f^2(x)dx \geq \left(\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)$$

$$\sum_{n=1}^{N} b_n^2 \leq \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f^2(x)dx$$

اين نامساوي به ازاء هر N برقرار است(من له زما كه N به ايت ميل كند)

پس:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N} a_n^2 \geq \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f^2(x)dx$$

سري $\frac{a_o^2}{2}+\sum_{n=1} a_o^2$ يك سري با لات مثبت و مقدار دود است پس:

براي حالت سينوسي دار :

$$\lim_{n} a_n = 0$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \geq 2\times\left(\sum_{n=1}^{N} b_n^2+\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right) \geq 0$$

$$\sum_{n=1}^{N} b_n^2 \leq \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f^2(x)dx \qquad \lim_{n} b_n = 0$$

پس واره دنباله هاي a_n, b_n در سري فوريه به ت ميل خواهند كرد.

قبلاً گفتيم كه بسط فوريه تابع $f(x)$ كه در بازي $(-n,n)$ تعريف شده بود بصورت:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_m Cosx+b_n Sinn_x\right)$$

بود و با ضرايب زير تعريف مي شد:

$$a_n = \frac{1}{n}\int_{-n}^{n} f(x) Cosdx \qquad b_n = \frac{1}{n}\int_{-n}^{n} f(x) Sinnxdx$$

و گفتيم كه تابع $f(x)$ بايد قطعه اي پيوسته باشد در اين صورت بسط فوريه تابع $f(x)$ كه در نقاطي كه $f(x)$ پيوسته است به $f(x)$ گرا است و در نقاطي كه $f(x)$ ناپيوسته است با متوسط جام برابر است .پس واره بسط فوريه گراست.

طبق قضيه نشان دار كه : $\lim ax = 0 \quad , \quad \lim bx = 0$

و نيز نشان دار كه:

$$a_0 2/2 + \sum_{n=1}^{N} a_n^2 \le 1/R \int_{-R}^{R} f(x) Cos^2 dx \ge 1$$

$$\sum_{n=1}^{N} b_n^2 \le 1/R \int_{-R}^{R} f^2 Cos(x) dx$$

قضيه:نشان دهيد كه سري $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{ax^2 + bx^2}$ گرا است:

اثبات:اگر b_n, a_n ضرايب بسط فوريه ي $f(x)$ باشند دار :

$$a_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} \beta(x) Cosnx \quad , \quad b_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} \beta(x) \sin nxdx$$

حال ضرايب α_n , β_n را به صورت زير تعريف مي كنم:

$$\alpha_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nxdx \quad , \quad \beta_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) Sinnxdx$$

با انتگرال گ ي جزء به جزء دار : $\alpha_n = a_n \times n \quad , \quad \beta_n = nb_n$

حال براي نشان دادن گرايي $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_m 2 + b_n 2}$ مقدار S_N را بصورت زير تعريف مي كنيم.

$$S_N = \left(\sum_{n=1}^{N} \sqrt{a_n 2 + b_n 2} \right)^2$$

نشان مي دهيم كه S_N به ازاء هر مقدار N گراست:

$$S_N = \left(\sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2)^{\frac{1}{2}} \right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\alpha_n^2}{n^2} + \frac{\beta_n^2}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 =$$

$$S_N = \left(\sum_{n=1}^{N} (1/n^2 (a_n^2 + b_n^2)^{\frac{1}{2}}) \right)^2 < \left(\sum_{n=1}^{N} 1/n^2 \right) \left(\sum_{n=1}^{N} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \right)$$

حال بايد اين نامساوي توجيه شود.

$$\sum_{n=1}^{N} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \qquad \sum_{n=1}^{N} 1/n^2$$

اما گراست و هم طبق ۱و۲ گرا هستند.البته تر است بگوئیم

دود هستند .بنابراين نز دود مي باشد.سپس سري $\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n^2+\beta_n^2)^{1/2}$ گراست.

قضيه پارسوال: طبق اين قضيه انرژي متوسط $f(x)$ در فاصله $(-\pi,\pi)$ بر حسب ضرايب بسط فوريه قابل اسبه است.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1} am \quad Cosbx + bn \quad \sin nx\right)dx$$

$$=\frac{a_0}{2}\times\frac{1}{\eta}\int f(x)dx+\sum an(\frac{1}{\eta}\int_{-\eta}^{\eta} f(x)Cos\,nx\,dx)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\left(\frac{1}{\eta}\int_{-\eta}^{\eta} f(x)Sin\,cx\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{\eta}\int_{\eta}^{\eta}\frac{a_0}{2} f(x)dx+\sum_{n=1} a_n \frac{1}{\eta}\int_{\eta}^{\eta} f(x)Cosnxdxt+\sum_{n=1} b_n \frac{1}{\eta}\int_{\eta}^{\eta} f(x)Sinnxdx$$

$$=\frac{a_o^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}an^2+\sum_{n=1}^{\infty}bn^2$$

(از خواص بسط فوريه) پس $\frac{1}{\eta}\int_{-\eta}^{\eta} f^2(x)dx=\frac{a_o^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(an^2+bn^2\right)$

مشتق پذيري و انتگرال بسط فوريه:

اگر f(x) تابع قطعه اي پيوسته در فاصله $(-\eta,\eta)$ باشد و داراي بسط فوريه زير باشد:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,Cos\,nx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n Sin\,nx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)Cos\,nx\,dx \quad , \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)Sin\,nx\,dx$$

آنگاه انتگرال تابع f (x) بصورت زير اسبه مي شود:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)du=\frac{a_0}{2}(x+\pi)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left(a_n Sin\,nx-b_n\left(Cos\,nxt(-1)^{n+1}\right)\right)$$

يع انتگرال بسط فوريه واره قابل اسبه است.

براي مشتق پذيري بسل لازم است كه f (x) در فاصله $[-\pi,\pi]$ تعريف شده باشد و داشته باشيم:

$f'(x)=f(x)$

آنگاه $f'(x)$ در نقاطي كه $f''(x)$ موجود است با مشق بسط فوريه برابر خواهد بود:

$$f'(x)=\sum(-n\,a_n\,Sin\,nx+nb_n Cos\,nx)$$

در فصل قبل حل معادلات لاپلاس به روش جداسازي متغ ها آورده شد $y_t = a^2 y_{xx}(x,t)$

$y(x,o) = f(x)$ $\quad y(a,t) = 0 \to y(c,t) = 0$

معادلات به فرم زير را به راح مي توان حل كرد:

$$y_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t)$$

براي حل معادلات f (x) را بصورت زير در نظر مي گ :

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t)$$

$$U(x,t) = u(z,t) + \phi(x)$$

$$U_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + h(x)$$

$$u_t(x,t) a^2 (u_{xx}(x,t) + \phi''(x)) + h(x)$$

$$a^2 \phi''(x) + h(x) = 0 \to \phi'' = -1/a^2\, h(x)$$

$$\phi(x) = \frac{-1}{a^2} \iint h(t)\, dt dv \qquad u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t)$$

حل معادله لاپلاس در صفحه (نوسان صفحه)

$$U_{tt}(xyt) = a^2 [(Z_{xx})(xy+) + Z_{yy}(xy_+)]$$

$$0<x<a \quad 0,<y<b \quad +>0$$

شرايط مرزي:

$$Z(0,y,t) = 0 \qquad Z(a,y,t) = 0 \qquad Z(x,0,t) = 0$$

$$Z(x,b,t) = 0 \qquad Z(x,y,0) = f(x,y)$$

روش :جدا سازي متغ ها:

$$Z(x,y,t) = X(x).Y(y).T(t)$$

$$XYT'' = a^2 (x''yt + XY''T) \Rightarrow \frac{T''}{a^2 T} = \frac{x''}{x} + \frac{y''}{y}$$

بنابراين دار :

انطور كه قبلاً گفتيم اين معادله صرفاً براي $\lambda < 0$ برقرار است: $\frac{T''}{a^2 T} = -\lambda^2$

$$T'' = -a^2 \lambda^2 T$$

$$\frac{X''(x)}{x(x)} + \frac{y''}{y} = -\lambda^2 \to \frac{X''}{X} = \frac{-y''}{y} - \lambda^2 = \begin{cases} +\eta^2 \\ 0 \\ -\eta^2 \end{cases}$$

پس دار :

$$\begin{cases} x(0)=0 & x(a)=0 \\ y(0)=0 & y(b)=0 \end{cases}$$ شرايط مرزي

حل:

$$\frac{X''}{X}=-\eta^2 \Rightarrow X''(x)=-\eta^2 X \Rightarrow X = BSin\,\eta x + ACos\,\eta x$$

$$X(a)=0 \rightarrow A=0$$

$$X(a)=0 \rightarrow o = BSin\ \eta a \Rightarrow \eta a = x\eta \Rightarrow \eta = \frac{n\eta}{a}$$

$$\Rightarrow X_n(x) = Sin = (\frac{n\eta}{a})x$$

$$\frac{y''}{y}-\lambda^2=-\eta^2 \Rightarrow \frac{y''}{y}=\lambda^2-\eta^2 \Rightarrow y''=(\lambda^2-\eta^2)y$$

پس براي اينكه اين رابطه جواب داشته باشد ،مطابق بالا بايد ضرايب $\lambda^2-\eta^2$ منفي باشد.

$$y(0)=0$$
$$y(b)=0$$
$$y''=-(n^2\lambda^2)y$$

$$y=c\sqrt{n^2-\lambda^2}\,y+DSin\sqrt{\eta^2-\lambda^2}\,y$$

$$\sqrt{\eta^2-\lambda^2}={m\eta}/{b} \Rightarrow \eta^2-\lambda^2=\left(\frac{m\eta}{b}\right)^2 \Rightarrow \lambda^2=\left(\frac{n\eta}{a}\right)^2-\left(\frac{m\eta}{b}\right)^2$$

$$\Rightarrow \lambda=\eta\sqrt{\frac{n^2}{a^2}-\frac{m^2}{b^2}}$$

پس η,λ بدست مي آيند.

$$\gamma_m = Sin\left(\frac{m\eta}{b}\right)y$$

۱-اگر $z_1=2\lambda$ $\quad Z_2=1-\lambda$ $\quad Z_3=3-2\lambda$ مطلوب است:

الف) $-1+i$ $\quad$ ب) $1+\sqrt{3i}$ $\quad$ ج) $3i$

۲-فرم قط اعداد تصات زير را نشان دهيد:

الف) $-1+i$ ب) $1+\sqrt{3}i$ ج) $3i$

۳-اگر $Z_1 = 2e^{i\pi}$, $Z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}}$, $Z_3 = se^{\frac{i}{u}}$ مطلوب است:

الف) $\frac{Z_1}{Z_3}$ ب) $Z_1\overline{Z_2}$ ج) $Z^4 - 2z^2 + 4 = 0$

٤-با استفاده از قانون دو مقدار $Sin3\theta$, $Cos3\theta$ را بيابيد

٥-نشان دهيد روابط زير برقرار است:

الف) $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}\, z$ ب) $\mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}\, z$

ج) $\overline{iz} = -i\bar{z}$ د) $\overline{\overline{Z} + 3i} = z - 3i$

٦- موعه نقاطي را پيدا كنيد كه در شرايط زير صدق كنند:

الف) $\mathrm{Re}(\bar{z} - i) = z$

ب) $|z-i| = |z+i|$

۷-اگر $Z_1Z_2 = 0$ ثابت كنيد حداقل يكي از آ ا صفر است.

۸-ريشه معادلات زير را پيدا كنيد:

الف) $Z^2 + 4 = 0$ ب) $Z^{\frac{2}{3}} + 3i = 0$ ج)

۹-نشان دهيد هذلوي $x^2 - y^2 = 1$ را مي توان بصوت $z^2 + z^{-2} = 2$ نوشت.

۱۰-با استقراء فرمول چند له اي متقابل

$$(1+z)^n = 1 + \frac{n}{i}z + \frac{n(n-1)}{2i}z^2 + \ldots . \frac{n(n-1)(n-2) + \ldots .(n-k+1)}{ki}z^x + \ldots . + z^n$$

را كه در آن n عددي صحيح و مثبت است بيابيد.

$z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ را به طريق برداري مشخص كنيد.

الف) $z_{1=} = (-3,1)$ $z_2 = (1,4)$

ب) $z_1 = x_1 + iy_1$ $z_{2=} = x_{1\_}iy_1$

۱۲-نشان دهيد:

$$|(2\bar{z}+5)(\sqrt{2}-i)| = \sqrt{3}|2z+5|$$

۱۳-ثابت كنيد: $|\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| < \sqrt{2}|z|$

١٤-يك مقدار از argz را بيابيدهرگاه:

$$Z = \frac{i}{-2-2i} \qquad Z = \frac{-2}{1+\sqrt{3}i}$$

الف)   ب)

از خواص مربوط به فضاي برداري داشتيم که اگر f , g : دو بردار بصورت زير باشند

$$\vec{f} = (a_1, a_2, a_3) \qquad \vec{g} : (b_1, b_2, b_3)$$

در اين صورت خواص زير را دار :

$$\vec{f}.\vec{g} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \qquad |f|^2 = f.f = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$\vec{f}.\vec{g} = |\vec{f}||\vec{g}|.Cos\theta \qquad |\vec{f} - \vec{g}| = \left((a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)\right)^{1/2}$$

$$f + g \Rightarrow \vec{f}.\vec{g} = 0 \qquad |f| = 1 \Rightarrow f = \text{بردارنرمال}$$

اگر $\phi_1, \phi_2, \dots\dots\dots, \phi_n$ موعه برداري ارتوگونال باشند يع :

$$<\phi_i, \phi_J> = 0 \quad , \quad <\phi_i \phi_i> = |\phi_i|^2$$

در اين صورت بردارهاي $\frac{\phi_1}{|\phi_1|}, \frac{\phi_2}{|\phi_2|}, \dots\dots\dots\dots, \frac{\phi_n}{|\phi_n|}$ موعه بردارهاي ارتونرمال هستند.

ترجيأ لازم است که بردارهاي $\phi_1 \dots\dots\dots \phi_n$ از هم مستقل باشند .چون در غ اين صورت يکي را بر حسب ديگري مي توان نوشت و صفر داخلي آ ا صفر واهد شد.

هر بردار در فضاي ا اد شده بوسيله اين بردار را مي توان با ترکيب خطي از اين بردارها بدست آورد.

$$f = c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2, \dots\dots\dots, c_n \phi_n$$

وي اسبه ضرايب بصورت زير است:

$$C_K <\phi_k \phi_k> = <f.\phi_k> \Rightarrow C_k = \frac{1}{\|\phi_k\|} < f, \phi_k >$$

استنتاج براي فضاي توابع:

اگر f , g توابعي در فاصله (a,b) و به فرم قطعه اي –پيوسته باشد(pwc)، چنانچه فاصله را به Δx هاي کوچك تقسيم کنيم ،خواهيم داشت:

$$f = (f_1, f_2, \dots\dots\dots, f_n)$$
$$g = (g_1, g_2, \dots\dots\dots, g_n)$$

ضرب برداري را بصورت زير تعريف مي كنيم كه f , g:

$$(f,g)=\sum f_K g_K \Delta x_K$$

$$\underset{\Delta x\to 0}{Lim}(f,g)=\int_a^b - f(x)g(x)dx$$

كه اين تعريف ضرب داخلي براي توابع مي باشد.

ناحيه a ,b را ضرب داخلي روي آن تعريف مي شودFundamental interval يا بازه ي اساسي ميناميد.

خواص زير براي ضرب داخلي توابع برقرار است:

$$(f,g)=(g,f)$$

$$(f,g+h)=(f,g)+(f,g)$$

$$(cf,g)=c(f,g)$$

$$(f,f)=\|f\|^2\geq 0\rightarrow \|f\|=\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)$$

$$(f,g)=0\Rightarrow f+g$$

$$|f-g|^2=\int_a^b (f-g)^2 dx$$

$(f,g)=1\Rightarrow$ f نرمال مي باشد

مثال:

$$<\Psi_i(x,\Psi_j(x))>=2/_c<\Psi_i\Psi_j>=\delta(i,j) \qquad 0<x<c \qquad \Psi_n(x)=Sin\frac{n\pi x}{c}$$

حال دسته توابع $\phi_i=\sqrt{\frac{2}{c}}Sin\frac{n\pi x}{c}$ دسته توابعي از ارتونرمال هستند زيرا:

مثال:دسته توابع $\phi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{c}}\ Cos\frac{n\pi x}{c}$, $\phi_0(x)=1/\sqrt{c}$ دسته توابع ارتونرمال هستند. $0<x<c$

مثال:دسته توابع $\phi_0=1/\sqrt{2c}$, $\phi_{2_{n-1}}=1/\sqrt{c}\,Cos\frac{n\pi x}{c}$, $\phi_0(x)=1/\sqrt{c}\,Sin\frac{n\pi x}{c}$ دسته توابع از ارتونرمال در(-C,C) هستند.

روش كلي فوريه براي بسط توسط توابع ارتونرمال:

$$f=c_0\phi_0+c_1\phi_1+........+c_k\phi_k+........+c_n\phi_n$$

$$C_k=\int_a^b f(x)\phi_k(x)dx \qquad k=0,1,....., \qquad C_k=<f.\phi_k> \quad \text{كه}$$

مثال از اسبه ضرايب:

$$f(x)=C_0\frac{1}{\sqrt{2c}}+C_1\frac{1}{\sqrt{2}}Cos\frac{n\pi x}{c}+C_2\frac{1}{\sqrt{2}}Sin\frac{n\pi x}{c}+.........$$

$$C_k=<f(x).\frac{1}{\sqrt{c}}Cos\frac{n\pi x}{c}>=\frac{1}{\sqrt{c}}\int_{-c}^{c}f(x)Cos\frac{n\pi x}{c}dx$$

كه ان ضرايب سري فوريه است. $a_k=\frac{ck}{\sqrt{c}}=1/c\int_{-c}^{c}f(x)Cos\frac{n\pi x}{c}dx$

قضيه اگر $\phi_n(x),.....,\phi_2(x),\phi_1(x)$ توابع از ارتونرمال باشد،يع :

$$<\phi_m(x).\phi_k(x)>=\begin{cases}0 & k\neq m\\ c_k^2=1 & k=m\end{cases}\qquad k,m=1,2,.....$$

و $\phi(x)$ يك تركيب خطي از توابع ارتوگونال $\phi_n(x),.......\phi_1(x)$باشد،

$$\phi(x)=\delta_1\phi_1(x)+.......+\delta_n\phi_n(x)$$

و نيز اگر f (x) يك تابع در ان بازه ي توابع ارتوگونال باشد، آنگاه تعريف مي كنيم ترين م تابع f (x) توسطϕ_k ها كه k=1,2,…….n باشد ،تابعي انند $\phi_{(x)}$ است به طوري كه ضرايب ان ضرايب فوريه باشد.

اثبات:اگر فرض كنيم $\delta_n,.......\delta_2,\delta_1$اعداد د واهي باشد و تابع$\phi(x)$ م   f (x) f باشـ د لازم است تا اندازه خطا مينيم شود $|f(x)-\phi(x)|$

اين مقدرا بانام خطا يع $|f(x)-\phi(x)|$ناميده مي شود.

$$E=|f(x)-\phi(x)|=\left(\int_a^b f(x)-\phi(x)^2dx\right)^{1/2}$$

$$E^2=|f(x)-\phi(x)|^2=\int(f(x))-\phi(x)^2dx$$

$$\int_a^b f^2(x)dx-2\int_a^b f(x)dx+\int_a^b\phi^2(x)dx$$

$$=|f(x)|^2-2\int_a^b f(x)\sum_{k=1}^n\delta_k\phi_k(x)dx+\int_a^b\left(\sum_{k=1}^n\delta_k\phi_k(x)\right)^2dx$$

$$=|f(x)|^2-2\sum_{k=1}^n\delta_k\int_a^b f(x)\phi_k(x)dx+\int_a^b\sum_{k=1}^n\sum_{k=1}^n\delta_k\phi_k(x)\delta_\ell\phi_\ell(x)dx$$

براي Min كردن E^2 بايد ت راست تابع Min شود.انچه متغ است δ_k است .يعـ $\phi(x)$ ساخته شده با ضرايب δ_x وق ترين م است كه ضرايب δ_k ان ضرايب فوريه

$$|f|^2 E^2=\sum\delta_k^2+2\sum_{k=1}^n\delta_k c_k=|f|^2+\sum_{k=1}^n\sum_{k=1}^n(\delta_k^2-2c_k\delta_k+c_k^2)-\sum_{k=1}^n c_k^2$$

باشند.

$$\delta_k = ck$$

$$= |f(x)|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \delta_K c_k + \sum_{k=1}^{n} \delta_k^2(1)$$

پس

$$c_k = < f(x)\phi_k(x) >$$

$$\delta_k = c_k \Rightarrow E^2 = \left\| f \right|^2 \Big| - \sum_{k=1}^{n} C_k^2$$

و چون $E^2 > 0$ (انتگرال از يك تابع مثبت)پس:

$|f(x)|^2 \ge \sum_{k=1}^{n} C_k^2 \qquad \forall_n \in N$ (لذا وق كه $n= \infty$)

به نامساوي فوق نامساوي بسل گويند.

وق $n \to \infty$ مي توان نشان داد كه lim C_n=0 به عبار سري $\sum_{k=1}^{n} ck^2$ به ازاء $\to \infty$ به ت $|f(x)|^2$ گرا مي شود. يع :

$$|f(x)|^2 = \sum_{k=1}^{n} C_k^2$$

موعه $\{\phi_k(x)\}$ روي (a,b) را كامل گوئيم اگر براي هر تابع f با دامنه (a,b) داشته باشيم:

$$\sum_{k=1}^{n} C_k^2 = |f|^2$$

يع خطا =0

بنابراين م با موعه اي از ارتونرمال كامل به خطاي صفر مي ا امد.

مثال: موعه اي توابع ارتونرمال هندسي:

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \phi_{2n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} Cos\, nx, \quad \phi_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} Sin\, nx$$

اين توابع روي $(-\pi,\pi)$ كامل هستند.

C هاي زوج:ضرايب b_n

C هاي فرد :ضرايب a_n

انواع ديگر ارتوگوناليس :

گوئيم توابع $\phi_k(x)$ در (a , b) با وزن p(x) ارتوگونال است اگر

$$\int_a^b P(x)\phi_k(x)\phi_m(x)dx = \begin{cases} 0 & m \ne k \\ cte & m = k \end{cases}$$

اين ارتوگونايس را مي توان معادل با ارتوگوناليس توابع $\sqrt{p(x)}\phi_k(x)$ گرفت.مثلاً توابع بسل به اين صورت تعريف مي شوند و توابعي كه داراي دومتغي هستند نيز مي توان ت توابع پايه $\phi_{mn}(x,y)$ بسط داد به گونه اي كه ضرب داخلي مربوط به صورت سطحي زير تعريف شود.

$$\iint_R \phi_{mn}(x,y) \quad \phi_{ek}(x,y)dxdy = \begin{cases} 0 & m \neq e, n \neq k \\ c_{mn}^2 & m = e, n = k \end{cases}$$

حال هر تابع را مي توان بر حسب توابع $\phi_{mn}(x,y)$ بسط داد.

م وق ينه است كه ضرايب ان فوريه باشند.

براي توابع تلف نيز مي توان ارتوگوناليس تعريف ود.

$$\omega = u + iv$$

$$\int_a^b \omega(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dx$$

$$\overline{\omega}(t) = u(t) - iv(t)$$

حال ضرب داخلي را بصورت زير تعريف مي كنيم:

$$< \omega_m(t), \omega_k(t) >= \int_a^b \omega_m(t)\overline{\omega_k(t)} \quad dt = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ \int \left(u_m^2(t) + v_m^2(t)\right)dt \end{cases}$$

كه آن را ضرب داخلي هرمتيك گويند.

انتگرال فوريه: تا ال در مورد بسط فوريه براي توابع پريوديك در فاصله (-2,2) صحبت كرده ا .نشان داد كه م ينه اي براي توابع در فضاي هندسي موجود است.

$$f(x) = {a_0}/{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Cos\frac{n\eta x}{c} + b_n Sin\frac{n\eta x}{c}$$

$$a_0 = {1}/{c}\int_{-c}^{c} f(x)dx \qquad a_n = {1}/{c}\int f(x)Cos\frac{n\eta x}{c}dx$$

$$b_n = {1}/{c}\int_{-c}^{c} f(x)Sin\frac{n\eta x}{c}dx$$

با جايگذاري دار كه:

$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(s)ds + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c}\left[\int_{-c}^{c} f(s)\cos\frac{n\pi s}{c}\cos\frac{n\pi x}{c}ds + \int_{-c}^{c} f(s)\sin\frac{n\pi s}{c}\sin\frac{n\pi x}{c}ds\right]$$

$$= \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(s)ds + \frac{1}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-c}^{c} f(s)Cos\frac{n\eta}{c}(s-x)dx$$

که ايش جديدي براي سري فوريه است.

حال چنانچه f(x) يك تابع از $(-\infty,\infty)$ باشد و مطلقاً انتگرال پذير باشد يع :

دود باشد:
$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(s)|ds$$

مي خواهيم ببينيم در شرايط فوق ،بسط فوريه به چه فرم جديدي تبديل مي شود.

براي اين منظور تعريف مي كنيم : $\Delta\alpha = \eta/c$

ت شرايط آورده شده ،بسط فوريه به صورت زير تبديل مي شود:

$$\frac{1}{c}\sum_{n=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)Cos(n\Delta\alpha(x-s))ds = \frac{1}{\eta}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)Cos(n\Delta\alpha(x-s))ds$$

$$\frac{1}{\eta}\sum_{n=1}^{\infty} f(n\Delta\alpha)\Delta x$$

$$1 \quad = \frac{1}{\eta}\int_{o}^{\infty} F(\alpha,x)d\alpha = \frac{1}{\eta}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)Cos(\alpha(x-s))dsd\alpha$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n\Delta\alpha)\Delta x = \int_{o}^{x} f(x)dx = \quad f(x) = \int_{0}^{\infty}(A(\alpha)Cos\,\alpha x + B(\alpha)Sin\,\alpha x)$$

بنابراين در حال كه $c\to\infty$ بسط فوريه به فرم فوق كه با نام انتگرال فوريه ناميده مي شود ميل مي كند:

$$f(x) = \frac{1}{\eta}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)Cos\,\alpha(s-x)dsdx \qquad -\infty < x < \infty$$

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos\alpha u du \qquad B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\alpha u du$$

مثال: $f(x) = e^{-2|x|}$ مطلوب است اسبه ضرايب $B(\alpha), A(\alpha)$

$$A(\alpha) = \frac{1}{\eta}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)Cos\,\alpha s ds \qquad B(\alpha) = \frac{1}{\eta}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)Sin\,\alpha s ds$$

$$|bn|n^4 < M \to \left|4bn\,Sin\frac{n\eta x}{c}\right| \to \left|b_n Sin\frac{n\eta x}{c}\right| \le |b_n|$$

$$\le \sum \left|b_n \le \frac{M}{n^4} = M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\right|$$

انتگرال فوریه $e^{-|x|}$ را بنویسید:

روش حل دوم: $f(x)=\int (A(\alpha)Cosx+B(\alpha)Sin\,\alpha x)dx$

$$A(\alpha)=\frac{1}{\eta}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)Cos\,\alpha x\,dx \quad ,B(\alpha)=\frac{1}{\eta}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)Sin\,\alpha x dx$$

$$f(x)=e^{-|x|} \qquad -\infty<x<\infty \qquad B(\alpha)=\frac{1}{\eta}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}Sin\,\alpha x\,dx$$

$$f(x)=\int_0^{\infty}(A(\alpha)Cos\,\alpha x+B(\alpha)Sin\,\alpha x)dx \quad \mathrm{Re}\int_o^{\infty} e^{-x}e^{i\alpha x} \quad B(\alpha)=0, A(\alpha)=\frac{2}{\eta}\int_0^{\infty} e^{-x}Cos\,\alpha x dx$$

$$A(\alpha)=\frac{1}{\eta}\int e^{-|x|}\ Cos\,\alpha x\,dx$$

$$=\frac{2}{\eta}\times\frac{1}{\eta}\left[\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}A(\alpha)\times\frac{\eta}{2}\right]$$

$$\Rightarrow A(\alpha)=\frac{2}{\eta}\left(\frac{1}{\alpha^2}(1-A(\alpha))\right)\Rightarrow\frac{\eta\alpha^2(A(\alpha))}{2}=1-A(\alpha)\frac{\eta}{2}$$

$$\Rightarrow A(\alpha)=\frac{2}{\eta(\alpha^2+1)}$$

$$e^{-|x|}=\int_0^{\infty}\frac{2}{\eta(\alpha^2+1)}Cos\,\alpha x\,dx\Rightarrow$$

$$\frac{2}{R}\int\frac{Cos\ 5\ x}{1+x^2}dx=\frac{R}{2}e^{-5}$$

$$\int\frac{Cos5\alpha}{1+\alpha^2}d\alpha=\frac{\pi}{2}e^{-5}\rightarrow\alpha=x$$

رين: مقدار انتگرال $\int_0^{\infty}\frac{Sin\,2\pi x}{1+x^2}dx$ را بدست آورید.

براي این منظور است که:

$$f(x)=\begin{cases}-e^{-x} & x>0\\ -e^{-x} & x<0\end{cases}$$

جواب $=\frac{\pi}{2}e^{-2\pi}$

$$\frac{2}{R}\int\frac{Cos\ 5x}{1+x^2}dx=\frac{R}{2}e^{-5}\rightarrow\alpha=x$$

مسأله انتقال حرارت زیر را حل کنید:

$$f(x_0)=\int_0^{\infty}A(\alpha)Cos\alpha x_0+B(\alpha)Sin\alpha x_0 d\alpha$$

$$u_t(x,t)=ku_{xx}(x,t)$$

$$u(0,t)=0 \qquad u(x,o)=F(x) \qquad x>0 \qquad t>0$$

انطور که مشاهده مي شود حوزه تغي ات x تا ايت است. بنابراين روش حل از تبديل در سري فوريه که ان انتگرال فوريه مي باشد بدست خواهد آمد.

$$u(x,t)X(x)T(t\to)\frac{T'(t)}{kt(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=\begin{cases}x^2\\0\\-\lambda^2\end{cases}\Rightarrow \text{غ ق ق}$$

$$U(x_1)=0\to X(0)=0$$

$$X(x)=A\cos(\lambda x)+B\sin(\lambda x)$$

$$X(x)=\sin\lambda x$$

$$T(t)=e-\lambda zkt$$

انتگرال فوريه $U(x,t)=\int_0^\infty(B\lambda e^{-k\lambda}{}_+ Sin\ \lambda x)dx \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}B(\lambda)\sin\lambda xd\lambda=f(x)$

$$B(\lambda)=2/R\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\lambda xdx$$

معر توابع بسل و کاربردهاي آنا:

درفرم معادله اي استوانه اي معادله لاپلاس دار :

$$\Delta^2u=p^2\frac{du^2}{dp^2}+p\frac{du}{dp}+(\lambda p^2-v^2)y=0$$

چنان چه در اين معادله به جاي $x=\sqrt{\lambda}p$ تغي متغي دهيم دار :

$$x/\lambda\times\frac{\partial^2u}{\partial p^2}.\frac{\partial x^2}{\partial p^2}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2u}{\partial p^2}=\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)=\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial p}\right).\frac{ex}{ep}$$

اين معادله را معادله ديفرانسيل به نام معادله بسل مي شناسيم:

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\lambda}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sqrt{\lambda}=\lambda\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{\lambda}.\lambda\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{x}{\lambda}.\sqrt{\lambda}\frac{dy}{dx}+(x^2-v^2)y=0$$

روش حل اين گونه معادلات با استفاده از سريها بود.

سري پيشنهادي بصورت زير است:

$$y(x)=x^r\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$$

$$\Rightarrow x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left(x^2-v^2\right)y=0$$

علت پيشنهاد اين اين جواب اين است كه در معادله نقطه ي $x=0$ يك نقطه تك منظم است

چون :

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-v^2\right)y-0 \qquad y''+\frac{1}{x}y'+\frac{x^2-v^2}{x^2}y=0$$

كه مشاهده مي شود نقطه $x=0$ يك نقطه تك است.

$$x^2\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)(r+k-1)a_k x^{r+k-2}+x\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)a_k x^{(r+k-1)}$$

$$t\left(x^2+v^2\right)\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)(r+k-1)a_k x^{r+k}=0$$

در حال كه $v=n$ $\quad n=1,2,.......,$

$$\sum\left((r+k)(r+k-1)av\,x^{r+k}+(r+k)akx^{r+k}-n^2akx^{r+k}\right)+\sum akx^{r+k+2}=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}x^{r+k}\left((r+k)(r+k-1)+(r+k)-n^2ak+akx^2\right)=0$$

در ايت

$$:(r-n)(r+n)a_0+(r-n+1)(r+n+1)a_1x+\sum\left((r-n+k)(r+n+k)a_k+a_k-2\right)x^k=0$$

$\Rightarrow a_0$ يا $(r+n)(r+n)=0$

$(r-n+1)(r-n+1)=0$ يا $a_1=0$

$$*\Rightarrow a_k=\frac{-1}{(r-n+k)(r+n+k)}a_k-2$$

در نتيجه توسط رابطه بازگشت $*\Rightarrow a_k=\frac{-1}{(r-n+k)(r+n+k)}a_k-2$ مي توان ام روابط سري را بدست آورد.چون:

$$r=n\Rightarrow a_k=\frac{-1}{(r-n+k)(r+n+k)}a_k-2$$

که براي k هاي زوج عدد غ صفر مي باشد.

$a_1, a_3, a_{2m} + 1 = 0$

اما $a_0 \neq 0$ و

در ايت فرم کلي جواب:

$$a_2 = \frac{-1}{2(2n+2)} a_0, a_4 = \frac{1}{4(2n+2)(2)(2n+2)}$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{ki(n+1)(n+2)(n+k)2^{2k}}$$

براي اينكه بتوان فرم ساده شده اي براي جواب پيشنهاد كرد ،مقدار a_0 را به صورت زير انتخاب مي كنيم:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!2^{n+2k}} \qquad a_0 = \frac{1}{n!2^n}$$

پس جواب به فرم زير است :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

به مقدار اين جواب $y_n(x)$ گويند.

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

$y_n(x)$ را تابع مرتبه n ام بسل مي نامند.

اين تابع حل معادله ديفرانسيل مرتبه n مي باشد.

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \to y = y_n(x)$$

براي مثال:حل معادله بسل مرتبه صفر:

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0 \to y = y_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

شكل $y_0(x)$ به صورت زير مي باشد :

انداخ در آب اد y_0 است.

$$y_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{3!}\right)^2 \left(\frac{x}{2}\right)^6 \ldots\ldots\ldots \quad .$$

قضيه جواب معادله گن در هرنقطه تابع است.

خاصيت تابع بسل:

خواص توابع بسل:

$$1)\ Cos(xSin\theta) = y_o(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^n\right)y_n(x)Cos\phi$$

$$2)\ Sin(xSin\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(-1)^n\right)y_n(x)Sin\phi$$

پس دار $$y2_n(x) = \frac{1}{R}\int_0^R Sin(xSin\phi)Sin(2x-1)\phi\, d\phi$$

در حالت كلي(۳ $$y_n(x) = \frac{1}{R}\int_0^R Cos(n\phi - xSin\phi)d\phi$$

با توجه به اينكه

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{-1^k}{K!(x+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

$$x^{-n}y_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-1^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$4)\frac{d}{dx}x^{-n}y_n(x) = -nx^{-n-1}y_n(x) + x^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\frac{(n+2x)}{2}.\left(\frac{x}{2}\right)^{n-2k-1}$$

$$-x^{-n}y_{n+1}(x)$$ پس $$y'(0) = -y_1(x)$$

تابع $y_0(x)$ به صورت زير مي باشد.

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}[(\log\frac{x}{3} - v)J_0(x)] + \frac{x^4}{x^2} - \frac{x^4}{x^2 4^2}(1+\frac{1}{2}) + \frac{x^6}{x^2 4^2 6^2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) + ...$$

$$R(V) = \frac{R(v+1)}{v}$$

$$V \to -1^t \quad V \to -1^t$$

$$V\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2} = \min$$

خواص توابع بسل:

$$1)\ Cos(xSin\theta) = y_o(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^n\right)y_n(x)Cos\phi$$

$$2)\ Sin(xSin\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(-1)^n\right)y_n(x)Sin\phi$$

پس دار $y2_n(x) = \frac{1}{R}\int_0^R Sin(xSin\phi)Sin(2x-1)\phi d\phi$

در حالت كلي(۳ $y_n(x) = \frac{1}{R}\int_0^R Cos(n\phi - xSin\phi)d\phi$

با توجه به اينكه

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1^k}{K!(x+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

$$x^{-n} y_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$4)\frac{d}{dx}x^{-n}y_n(x) = -nx^{-n-1}y_n(x) + x^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\frac{(n+2x)}{2}.\left(\frac{x}{2}\right)^{n-2k-1}$$

$-x^{-n}y_{n+1}(x)$ پس $y'(0) = -y_1(x)$

روابط زير از خواص توابع بسل مي باشند:

$$1)\, xy_n(x) = ny_n(x) - xy_{n+1}(x)$$

$$2)\, xy_n(x) = -ny_n(x) + xy_{n-1}(x)$$

$$xy_{n+1}(x) = 2ny_n(x) - xy_{n+1}$$

بررسي صفرهاي تابع بسل :

تابع $y_n(x)$ داراي ريشه هاي نا محدود است (از نظر تعداد)كه در مكان هاي مشخص هستند.

$y_n(x) = 0 \rightarrow$ ريشه ها $= \{\alpha_{n0}, \alpha_{n1}, ..., \alpha_{A}\}$

$\phi a \circ \rightarrow y_n(\alpha ni) = 0$

ديد كه شكل تابع y_o از انداخ سنگ در آب ناشي مي شد.

$$b_n = \frac{2}{c}\int_o^c \frac{f(x) - f(-x)}{2} Sin\frac{N\eta x}{c}dx = \frac{1}{c}\left[\int_o^c f(x)Sin\frac{N\eta x}{c}dx - \int_o^c f(x)Sin\frac{N\eta x}{c}dx\right]$$

$x = -x \qquad dx = -dx$

$$\int_o^c f(x)Sin\frac{N\eta x}{c}(-dx)$$

در خارج ازاين فاصه بسط سينوسي $\sum b_n Sin\, nx$ اولاً داراي پريود 2π است.و فرض كنيد كه $f(x)$ يك تابع قطعه اي پيوسته در فاصله ي (۲،۲-) انطور كه مي دانيم هر تابع را ﻩ ـ ﻲ ﺗ ـ وان بصورت ع در تابع زوج و فرد نوشت.

$$f(x)=h(x)+g(x) \qquad \text{كه} \qquad g(-x)=-g(x) \;,\quad h(-x)=h(x)$$

$$h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \qquad g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

تابع $h(x)$ يك تابع زوج است بنابراين چنانچه $h(x)$را در فاصله (۲،۰) با بسط كسينوسي تقريب بزنيم ،تابع $h(x)$ در ناحيه(۲،۲-) تقريب زده خواهد شد.($h(x)$و كينوس هر دو زوج اند).

$$h(x)=a_o/\eta+\sum_{n=1}^{\infty}a_n Cos\frac{n\eta x}{c} \qquad a_n=2/c\int_o^c h(x)Cos\frac{n\eta x}{c}dx$$

$$f(x)=h(x)+g(x) \qquad (-c,c)$$

پس

$$f(x)=a_o/2+\sum_{n=1}^{\infty}a_n Cos\frac{n\eta x}{c}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n Sin\frac{n\eta x}{c} \quad \text{كه} \quad x\in(-c,c)$$

كه اين بسط تابع فوريه $f(x)$ در فاصله (۲،۲-) مي باشد.حال بايد ضرايب را پيدا ائيم.

$$2/\eta \int_0^c SN(x)\, Sin\, mx\, dx = bm$$

$$a_n=2/c\int_o^c\frac{f(x)+f(-x)}{2}Cos\frac{n\eta x}{c}dx=1/c\left[\int_o^c f(x)Cos\frac{n\eta x}{c}dx+\int_o^c f(-x)Cos\frac{n\eta x}{c}dx\right]$$

فرض كنيد ناحيه C ناحيه اي بصورت زير باشد و $\beta(Z)$ بغ از نواحي مشخص شده ليلي باشد آنگاه انتگرال $\beta(Z)$

$$\int_B \beta(Z)dZ=0$$

روي ناحيه D فوق برابر صفر است.

$$\int_C\frac{dZ}{Z^2(Z^2+q)}=\phi$$

گوئيم انتگرال $\int\beta(Z)dZ$ مستقل از ميسر است اگر

$$\int_C\beta(Z)dZ=\int_a^b\beta(Z)dZ=F(Z(b))-F(Z(a))$$

البته مي توان گفت يك نام $\beta(z)$ ولداي انتگرال مستقل از مسـ است اگر بنام ولداي تابع اوليه باشد. مثال:

$$\beta(z)cz^2 \rightarrow F(z)c\frac{z^3}{3}$$

$$\int_0^{1+i} z^2 z = \frac{1}{3}(1+i)^3 +$$

$$\int_{-2i}^{2i} \frac{dz}{z} = \log z \int_{-2i}^{2i} = \log 2i - \log(-2i) = tui$$

انتگرال كوشي

اگر $\beta(z)$ يك تابع ليلي در C باشد و تنها در نقطه در C ليلي نباشد آنگاه

$$\int_c \frac{\beta(z)dz}{z - z_0} = 2\pi i \quad \beta(z_0)$$

مثال:

$$\int_c \frac{\beta(z)dz}{z - z_0} = 2\pi i \quad \beta(z_0)$$

$$\int_c \frac{zdz}{(q-z)(z-i)} = 2\pi i \frac{i}{q+1} = \frac{-2\pi}{10}$$

$$\int_c z_0 \beta(z) dz = z_0 \int_c \beta(z) dz$$

$$\int_c (\beta(z + g|t|))dz = \int_c \beta(z) az + \int_c g(z) dz$$

$$\left| \int_c \beta(z) dx \right| \leq \int_a |\beta(z(t)Z')| dt$$

مثال:

$$Ic\int_{C1} z^2 dz$$

؟ انتگرال از______تا______بصورت هاي زير

$$I_1 = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i$$

$$I_2 = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i$$

$$Ic\int_{C} Z^{2}\, dZ$$

طبق قضيه كوشي

$$\int_{C} Pdx + Qdy = \iint_{R} \left(\frac{\partial Q}{\partial X} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) dxdy$$

$$\int_{C} \beta(Z) d\delta = \int_{C} Ndx - Vdy + i\int Xdx + udy$$

$$= \iint_{R} \left(\frac{-\partial u}{\partial y} - \frac{\partial n}{\partial x} \right) dxdy + i\iint_{R} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) dxdy$$

با توجه به اينكه اگر C ناحيه بسته باشد و $\beta(Z)$ ليلي باشد

$$u_x = v_y$$

$$Xy = -V_X$$

لذا طبق قضيه اگر $\beta(Z)$ ليلي باشد انتگرال آن روي هر ناحيه C اي كه حـد $\beta(Z)$ حـد رو و درون C

ليلي باشد برابر با صفر است

مفهوم انتگرال:

$$\omega(t) = X(t) + iy(t)$$

$$\int_{a}^{b} \omega(t) d + \int_{a}^{b} X(t) dt + o\int_{a}^{b} y(t) dt$$

مثال:

$$\int \theta^{i2t} dt = \sqrt{3}/2 + i/4$$

خواص:

$$\operatorname{Re} \int \int_{a}^{b} \omega(t) dt = \int_{a}^{b} \operatorname{Re} |Z(t)|\, dt$$

$$\int Z\omega(t) dt = Z\int_{a}^{b} \omega(t)$$

$$r_0 e^{\theta_0} = \int \omega(t) dt \Rightarrow \int \left(e^{-u\theta_0} \omega(t)\right) dt \text{ يا } \qquad r_o c\int \operatorname{Re}\left(e^{-1\theta_0} \omega(t)\right) dt$$!؟

$$\left| \int_{a}^{b} X(t) dt \right| \leq \int_{a}^{b} |\omega(t)| dt$$

انواع انتگرال ۱) Line Integral

$$\int_C \beta(t)dt \quad \text{يا} \quad \int_{z_1}^{z_2} \beta(t)dt$$

با فرض اينكه z روي يك خط حركت مي ايد.

$$z = z(t)$$

$$\int_a^b \beta(z)dt = \int_{z_1}^{z_1} (u / x(t) + iv(x(t), y(t)))(dX' + 1dy')dt$$

$$= \int_{z/t_0}^{z/t_1} (Ux' - Vy') + i(uy' + Vx')dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (Ux' + Vy')dt + \int_{t_0}^{t_1} (Uy' + Vx')dt$$

$$\int_{-C} \beta(z)dz - \int_C \beta(z)dz$$

حل معادله لژاندر:

معادله $(1 - x^2)y'' - 2xy' + y = 0$ را با نام معادله ثراندر مي شناسيم.

با حل معادله فوق با روش سري ها دار .اين بنام حد فاصله تعريف مي شود توا اي معادله به صورت زير هستند

$$y_1 = a_0 + \sum_{h-1}^{\infty} a_{2h} \times 2h$$

$$y_2 = a_1 x + \sum_{h-1}^{\infty} a_{2h+1} \times 2h + 1$$

بنام ثراندر از مرتبه n را به صورت $P_n(x)$ تعريف مي كنيم كه در آن $\lambda = n(n+1)$

$$P_n(x) - \frac{1}{2^n} \sum \frac{(-1)^x (2n - 2h)!}{h!(n - 2h)h_{\bullet}(n + x)} X^{n-2h} \qquad n = 0,1,....$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = X$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(3S-3)$$

$$P_4(x)=\frac{1}{2}(3s\times 4-30x^2+3)$$

خواص دار که $P_n(-x)=(-1)P_n(x)$

!؟اگر حل معادله $(i-x^g)y^n-3\times y'+n(n=1)y=0$ جوا ا به صورت توابع لژاندر مي باشد.

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)+P_n(x)d\times=\int mn \qquad m\neq n$$

$$\phi_n(x)=\frac{P_n(x)}{|P_n(x)1|}\rightarrow \{\phi_n(x)\}$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\frac{1}{n^1}\frac{d^n}{d\times n}(x^2-1)^n$$

$$P_{n+1}(x)-xp_n=\frac{n}{2^n n!}D^{n-1}u^n,\quad u=(x^2-1)$$

$$P'_{n+1}(x)-P'n-1(x)=(2n+1)P_n(x)$$

$$|1P_n(x)1|=\sqrt{\frac{2}{2n+1}}\rightarrow \phi_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x)$$

$$\beta(x)=\int_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x)\Rightarrow A_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}\beta(x)P_n(x)dx$$

كاربرد ترانَدر درحل مسائل معادلات با مشتقات جزئي در تصات كروي مي باشد.

$$r\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)+\frac{1}{Sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)=0 \qquad 0<r<c\ ,\ 0<\partial<\pi$$

$$V(c,\partial)=F(\theta)$$

باجداسازي به معادله ترانَدر مي رسيم.

$$V(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(\frac{r}{c}\right)^n P_n(Cos\theta)$$

$$=1/c=\left[\int_o^c f(x)Cos\frac{n\eta x}{c}dx+\int_{-c}^{o} f(x)Cos\frac{n\eta x}{c}dx\right]=1/c\int_{-c}^{c} f(x)Cos\frac{n\eta x}{c}dx$$